

経済数学 A (線形代数)

追加課題

香川大学 経済学部 2003 年度 前期

担当：三原麗珠

論理式にかんする練習問題 (三原 page 21 演習のタイプの問題) がもっと欲しいという要望があったので、以下を追加する。

このほか、集合と写像 (論理をふくむ) の範囲の練習問題として、Web に掲載してある以下の問題も忘れないように: 2000 年度前期経済学概論 A (メカニズムと権利) 第 1 回中間試験の問題 2, 3 と 2000 年度前期経済学概論 A (メカニズムと権利) 期末試験の問題 1, 2.

追加 1. 集合 $I = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の 2 項関係 $B \subseteq I \times I$ が以下で与えられている: $1B2, 2B3, 3B1, 4B1$; すなわち $B = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$.

(i) いま点を $1, 2, 3, 4$ として、この 2 項関係を表す「グラフ」を描け。ただし iBj (“ i beats j ” つまり “ i は j を打ち負かす” と読もう) を $i \rightarrow j$ のように点 i から点 j への矢印つきの枝で表すことにする。

(ii) 以下の条件を満たす 4×4 行列 A により、この 2 項関係を表せ: iBj ならば成分 $a_{ij} = 1$; iBj でなければ成分 $a_{ij} = 0$.

(iii) 以下の命題 (a)–(d) のそれぞれについて、その真偽を答えよ。

(a) $\forall i \in I \exists j \in I [iBj]$.

(b) $\forall j \in I \exists i \in I [iBj]$.

(c) $\exists j \in I \forall i \in I [iBj]$.

(d) $\exists i \in I \forall j \in I [iBj]$.

追加 2. 集合 $I = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の 2 項関係 $B \subseteq I \times I$ が以下で与えられている: $1B1, 1B2, 2B1, 2B3, 3B1, 4B1$; すなわち $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$.

このとき追加 1 の (i)–(iii) と同じ問に答えよ。

追加 3. 行列 A, B が以下のように与えられている。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$I = \{1, 2, 3\}$, $J = \{1, 2, 3, 4\}$, 行列 A の (i, j) 成分を a_{ij} とするとき、以下の命題 (a)–(f) のそれぞれについて、その真偽を答えよ。行列 B についても同様の問に答えよ (ただし命題のなかの a_{ij} は、 B の成分 b_{ij} で置き換えて考えよ)。

(a) $\forall i \in I \exists j \in J [a_{ij} = 1]$.

(b) $\forall j \in J \exists i \in I [a_{ij} = 1]$.

(c) $\exists j \in J \forall i \in I [a_{ij} = 1]$.

(d) $\exists i \in I \forall j \in J [a_{ij} = 1]$.

(e) $\exists i \in I \forall j \in J [a_{ij} = 0]$.

(f) $\exists i \in I \exists k \in I [i \neq k \ \& \ \forall j \in J [a_{ij} = a_{kj}]]$.

リマーク. 命題 (e) が真のとき、行列式 $|A| = 0$ となる (テキスト p. 65, 定理 1.12(3)). 命題 (f) が真のとき、行列式 $|A| = 0$ となる (テキスト p. 59, 定理 1.10).

追加 4. 追加 1-3 を参考にして、三原 page 21 演習を考え直してみよう。[ヒント. たえば追加 1 で 2 項関係 B を $yBx \iff y > x$ で定義してみよ。]