

経済数学 A (線形代数)

追加課題

香川大学 経済学部 2003 年度 前期

担当：三原麗珠

論理式にかんする練習問題 (三原 page 21 演習のタイプの問題) がもっと欲しいという要望があったので、以下を追加する。

このほか、集合と写像 (論理をふくむ) の範囲の練習問題として、Web に掲載してある以下の問題も忘れないように: 2000 年度前期経済学概論 A (メカニズムと権利) 第 1 回中間試験の問題 2, 3 と 2000 年度前期経済学概論 A (メカニズムと権利) 期末試験の問題 1, 2.

**追加 1.** 集合  $I = \{1, 2, 3, 4\}$  上の 2 項関係  $B \subseteq I \times I$  が以下で与えられている:  $1B2, 2B3, 3B1, 4B1$ ; すなわち  $B = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$ .

(i) いま点を  $1, 2, 3, 4$  として、この 2 項関係を表す「グラフ」を描け。ただし  $iBj$  (“ $i$  beats  $j$ ” つまり “ $i$  は  $j$  を打ち負かす” と読もう) を  $i \rightarrow j$  のように点  $i$  から点  $j$  への矢印つきの枝で表すことにする。

(ii) 以下の条件を満たす  $4 \times 4$  行列  $A$  により、この 2 項関係を表せ:  $iBj$  ならば成分  $a_{ij} = 1$ ;  $iBj$  でなければ成分  $a_{ij} = 0$ .

(iii) 以下の命題 (a)–(d) のそれぞれについて、その真偽を答えよ。

(a)  $\forall i \in I \exists j \in I [iBj]$ .

(b)  $\forall j \in I \exists i \in I [iBj]$ .

(c)  $\exists j \in I \forall i \in I [iBj]$ .

(d)  $\exists i \in I \forall j \in I [iBj]$ .

**追加 2.** 集合  $I = \{1, 2, 3, 4\}$  上の 2 項関係  $B \subseteq I \times I$  が以下で与えられている:  $1B1, 1B2, 2B1, 2B3, 3B1, 4B1$ ; すなわち  $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$ .

このとき追加 1 の (i)–(iii) と同じ問に答えよ。

**追加 3.** 行列  $A, B$  が以下のように与えられている。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$I = \{1, 2, 3\}$ ,  $J = \{1, 2, 3, 4\}$ , 行列  $A$  の  $(i, j)$  成分を  $a_{ij}$  とするとき、以下の命題 (a)–(f) のそれぞれについて、その真偽を答えよ。行列  $B$  についても同様の問に答えよ (ただし命題のなかの  $a_{ij}$  は、 $B$  の成分  $b_{ij}$  で置き換えて考えよ)。

(a)  $\forall i \in I \exists j \in J [a_{ij} = 1]$ .

(b)  $\forall j \in J \exists i \in I [a_{ij} = 1]$ .

(c)  $\exists j \in J \forall i \in I [a_{ij} = 1]$ .

(d)  $\exists i \in I \forall j \in J [a_{ij} = 1]$ .

(e)  $\exists i \in I \forall j \in J [a_{ij} = 0]$ .

(f)  $\exists i \in I \exists k \in I [i \neq k \ \& \ \forall j \in J [a_{ij} = a_{kj}]]$ .

**リマーク.** 命題 (e) が真のとき、行列式  $|A| = 0$  となる (テキスト p. 65, 定理 1.12(3)). 命題 (f) が真のとき、行列式  $|A| = 0$  となる (テキスト p. 59, 定理 1.10).

**追加 4.** 追加 1-3 を参考にして、三原 page 21 演習を考え直してみよう。[ヒント. たえば追加 1 で 2 項関係  $B$  を  $yBx \iff y > x$  で定義してみよ。]