経済数学 A (線形代数) 期末試験
問題冊子・解答用紙 4 枚目中 1 枚目
香川大学 経済学部 2003 年度 前期
三原麗珠 担当

学籍番号 ____________________

受験者名 ____________________

注意
a. **解答はこの用紙に直接記入して，提出すること．**
b. **問題冊子は 4 ページあり，5 ページ目に計算用紙が綴じてある．**
c. **極端に薄い文字や記号による回答は避けること．特に選択式の問題であいまいな回答は大きく減点される．**
d. **選択肢を選ぶ問題では，適当な選択肢 (1 つとは限らない) のラベルを○で囲めばいい．誤って囲んだ○を訂正する場合は，○をきれいに消しゴムで消すか，○よりやや大きめの×を○の上につければいい．**
e. **配点はそれぞれの問題のところにしめしてある．合計 70 点満点である．**
f. **正解は三原オフィスのドアに掲示する予定．**

問題 1 [2+2+2=6 点; 集合になっていない場合はそれぞれ 1 点減点; それ以外の部分点なし]. 選択肢の集合を $X = \{a, b, c\}$ とする．個人の集合を $\{1, 2, 3\}$ とする．いま選好プロファイル (R_1, R_2, R_3) が以下のようにあたえられている:

$$bP_1aP_1c$$
$$cP_2bP_2a$$
$$aP_3bP_3c.$$

(P_i は R_i に対応する強い選好．xP_iy は「個人 i は x を y **よりも**好む」の意．たとえば個人 1 は b を a よりも好み，a を c よりも好む．xR_iy は「個人 i は x を y **以上に**好む」の意．)

以下の (i), (ii), (iii) のそれぞれの集合を，具体的に要素を列挙することにより (たとえば $\{1, 2\}$ あるいは $\{b\}$ あるいは $\emptyset$ のように) 表せ:

(i) $\{i \in I : aP_ic\} =$ ____________.

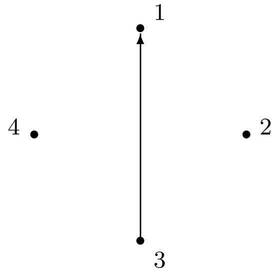
(ii) $\{x : xP_2b\} =$ ____________.

(iii) $\bigcap_{z \in X}\{x : xR_3z\} =$ ____________.

問題 2 [2+2+4=8 点; 部分点なし]. 集合 $I = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の 2 項関係 $B \subseteq I \times I$ が以下で与えられている: $1B2$, $2B4$, $3B1$, $3B2$, $3B3$, $3B4$, $4B1$; すなわち

$$B = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}.$$

(i) いま点を 1, 2, 3, 4 として，この 2 項関係を表す下の「グラフ」を完成させよ．ただし iBj を $i \to j$ のように点 i から点 j への矢印つきの枝で表せ．矢印ははっきりと描くこと．



(ii) 以下の条件を満たす 4×4 行列 A を完成させることにより，この 2 項関係を表せ: iBj ならば成分 $a_{ij} = 1$; iBj でなければ成分 $a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & & & \end{bmatrix}.$$

(iii) 以下の命題 a–c から真であるものをすべて選んでそのラベルを○で囲め:
a. $\forall i \in I\ \exists j \in I\ [iBj]$.
b. $\exists j \in I\ \forall i \in I\ [iBj]$.
c. $\exists i \in I\ \forall j \in I\ [iBj]$.

問題 3 [4 点; 部分点なし]. 以下の命題 a–d から真であるものをすべて選んでそのラベルを○で囲め．ただし $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする．
a. $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists y \in \mathbf{N}\ [x + y > 10]$.
b. $\exists y \in \mathbf{N}\ \forall x \in \mathbf{N}\ [x + y > 10]$.
c. $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists y \in \mathbf{N}\ [x + y < 10]$.
d. $\exists y \in \mathbf{N}\ \forall x \in \mathbf{N}\ [x + y < 10]$.

. . . .
[**自由欄**: 授業や試験の感想，落書きなどに使ってください．]

 学籍番号 ________________

問題 4 [4 点; 部分点なし]. つぎの行列 A と B の積 AB を求めなさい. 積 AB が定義されない場合は,「定義されない」と答えること.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$AB =$$

問題 5 [4 点; 部分点なし]. 連立 1 次方程式が以下のように与えられている:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$$

クラメールの公式にしたがい, 解 x_1 を行列式の商で表せ. 数字を埋めることにより, 以下の式の右辺の分子と分母の行列式を完成させればよい.

$$x_1 = \frac{\left| \quad \right|}{\left| \quad \right|}.$$

問題 6 [4+3=7 点; 部分点なし]. 2 次曲線 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ は直行変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

を行うことにより標準形

$$2X^2 + 8Y^2 = 4$$

に直せる.

(i) この曲線のグラフについて正しい選択肢を以下からすべて選び, そのラベルを◯で囲め:

a. この曲線は楕円である.
b. この曲線は双曲線である.
c. この曲線は直線である.
d. この曲線は X 軸と 2 か所で交わる.
e. この曲線は Y 軸と 2 か所で交わる.

(ii) 上の直行変換は, xy 軸を原点の回りに角 θ だけ反時計回りに回転させて XY 軸に移す座標変換を表す. 角 θ の値を求めよ. ただし $-\pi \le \theta \le \pi$ とする.

$$\theta =$$

問題 7 [6 点; 結果があやまりのときの部分点は 3 点まで (出発点が正しければ 2 点; 途中の行基本変形が 2 つ以上正しければ 1 点); 結果が正しくてプロセスに飛躍がないときは途中のミスを 2 点まで減点; プロセスに飛躍があれば 5 点まで減点]. 次の正則行列 A の逆行列 A^{-1} を掃き出し法で求めなさい. テキストにしたがって, 行基本変形のプロセスを (できれば表で) 明示すること.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

 学籍番号 ______________________

問題 8 [5 点; 単なる符号のまちがいをふくめ，結果があやまりのときの部分点は 2 点まで; 結果が正しくてプロセスに飛躍がないときは途中のミスを 2 点まで減点; プロセスに飛躍があれば 4 点まで減点; 展開する行あるいは列を丸で囲んでくれれば採点しやすい]．次の行列式の値を求めなさい．

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

問題 9 [6+3=9 点; (i) を行列式またはグラフだけでしめしたばあいは 0 点; (i) で方針が正しければ 2 点; (ii) は部分点なし]．$\mathbf{R}^2$ におけるベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ と $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を考える．

(i) $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ は $\mathbf{R}^2$ において線形独立であることを，**線形関係式をもちいて**(行列式やグラフによらずに) しめせ．

(ii) $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ について正しい選択肢を以下からすべて選び，そのラベルを〇で囲め:
a. $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底である．
b. $\mathbf{R}^2$ の任意のベクトル $\mathbf{x}$ は，$\mathbf{x} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$ (ただし k_1, $k_2 \in \mathbf{R}$) とただ 1 通りに表せる．

問題 10 [3+6+2=11 点; (i) は固有方程式に 1 点; (ii) で正しくない λ にたいして求めた固有ベクトルは 1 点ずつ減点]. 2 次の正方行列 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ を考える.

(i) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ. ただし $\lambda_2 > \lambda_1$ とする.

(ii) λ_1 に属する固有ベクトル $\mathbf{v_1}$ と, λ_2 に属する固有ベクトル $\mathbf{v_2}$ とを, それぞれ 1 つづつ求めよ.

(iii) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように正則行列 P を 1 つ選び, そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

$P =$

$P^{-1}AP =$

問題 11 [6 点; 方針が正しければ 2 点]. 線形写像 $f : V \to V'$ について, その核 K を

$$K = \{\mathbf{x} \in V | f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}'\}$$

とするとき, K は V の部分空間であることをしめせ.