共通科目 数学 B ゲーム理論
期末試験問題冊子
香川大学 全学共通科目 2004 年度 前期
三原麗珠 担当

注意
a. 解答はマークカードに鉛筆 (HB がベスト) で記入し，マークカードのみを提出すること．
b. マークカードの「学籍番号」欄の 2–7 桁目 (1 桁目のゼロを無視) に 右詰めで 学籍番号を記入してマークすること．たとえば学籍番号が「02E999」のばあい，マークカード上には「002E999」の 7 桁が現れることになる．
c. M (医学部) を含む学籍番号はそのまま記入し，マーク欄に M の替わりに Z をマークすること．
d. 問題冊子は 3 ページあり，4 ページ目に計算用紙が綴じてある．計算用紙を外して利用するといいだろう．
e. [設問 1] から [設問 24] のそれぞれについて，もっとも適当と思う正解候補につけられたラベルと同じ数字 (マーク記号) を，マークカード上の対応する設問番号直下の 1 から 0 の中から選び，マークせよ．
f. 配点はそれぞれの設問のところに標示してある．合計は 100 点である．
g. 分子/分母の形で分数を表すことがある．たとえば $3/5+1=\frac{3}{5}+1$.
h. 展開形ゲームの情報集合の表し方がテキストとちがっていることに注意．
i. 問題中に誤りを発見したばあい，試験中または試験直後に三原まで申し出ること．ボーナス点を与えることがある．
j. 試験中に問題修正をすることがある．その際，すでに退室した受験者が不利益を被る可能性がある．途中退室した受験者は，退室することによる不利益を了解した上で退室したものとみなされる．
k. 試験の正解，結果，講評などは，試験後に Web 上の講義ページに載せる．受け取った成績が自己採点と一致しなかったばあいは早めに連絡すること．

問題 1. 戦略形ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ が与えられている．

(i) 戦略 $s_1 \in S_1$ が戦略 $s'_1 \in S_1$ を (強) 支配するとは正解候補 (設問 2 と共通) のどの条件をみたすことか [設問 1: 3 点].

(ii) 戦略の組 $s=(s_1,s_2)$ がナッシュ均衡であるとは，正解候補のどの条件をみたすことか [設問 2: 5 点].

設問 1–2 の正解候補:
(1) $u_1(s_1,s_2) > u_1(s'_1,s_2)$ for all $s_2 \in S_2$.
(2) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s'_1,s_2)$ for all $s_2 \in S_2$.
(3) $u_1(s_1,s_2) > u_1(s'_1,s'_2)$ for all s_2, $s'_2 \in S_2$.
(4) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s'_1,s'_2)$ for all s_2, $s'_2 \in S_2$.
(5) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s'_1,s'_2)$ for all $s'_1 \in S_1$, $s'_2 \in S_2$ and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s'_1,s'_2)$ for all $s'_1 \in S_1$, $s'_2 \in S_2$.
(6) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s'_1,s_2)$ for all $s'_1 \in S_1$ and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s'_1,s_2)$ for all $s'_1 \in S_1$.
(7) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s'_1,s_2)$ for all $s'_1 \in S_1$ and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s_1,s'_2)$ for all $s'_2 \in S_2$.
(8) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s_1,s'_2)$ for all $s'_2 \in S_2$ and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s'_1,s_2)$ for all $s'_1 \in S_1$.
(9) $u_1(s_1,s_2) \geq u_1(s_1,s'_2)$ for all $s'_2 \in S_2$ and $u_2(s_1,s_2) \geq u_2(s_1,s'_2)$ for all $s'_2 \in S_2$.

問題 2. 図 1 のゲームを考える．

(i) Player 1 の戦略 U にたいする Player 2 の最適反応を正解候補 (設問 4, 5 と共通) から選べ [設問 3: 2 点].

Player 2

Player 1	l	m	r
U	$2,1$	$1,2$	$-1,1$
M	$1,-1$	$1,-1$	$1,1$
D	$2,3$	$3,2$	$0,0$

図 1: 問題 2 のゲーム

(ii) Player 2 の支配戦略を正解候補から選べ [設問 4: 4 点].

(iii) Player 1 の戦略 D が弱支配する戦略 (戦略 D によって弱支配される戦略) をすべてあげよ [設問 5: 4 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点]．

設問 3–5 の正解候補: (1) 戦略 U, (2) 戦略 M, (3) 戦略 D, (4) 戦略 l, (5) 戦略 m, (6) 戦略 r, (7) 存在しない.

(iv) このゲームの純粋戦略によるナッシュ均衡を以下から選べ [設問 6: 5 点; 均衡が存在しないばあいは (0) を，存在するばあいはそれらすべてを (1)–(9) から選ぶこと; すべての正解を選んだばあいのみ得点]: (1) (U,l), (2) (U,m), (3) (U,r), (4) (M,l), (5) (M,m), (6) (M,r), (7) (D,l), (8) (D,m), (9) (D,r), (0) 存在しない.

問題 3. 図 2 のゲームを考える．

Player 2

Player 1	l	r
U	$3,1$	$0,0$
D	$0,0$	$1,3$

図 2: 問題 3 のゲーム

いま，Player 1 の混合戦略を $\mathbf{p}=(p,1-p)$ とし (p は戦略 U を採る確率，$1-p$ は戦略 D を採る確率), Player 2 の混合戦略を $\mathbf{q}=(q,1-q)$ とする (q は戦略 l を採る確率，$1-q$ は戦略 r を採る確率)．このとき純粋戦略でない戦略 ($0<p<1$ かつ $0<q<1$) によるナッシュ均衡 $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ における p の値 [設問 7: 6 点] と Player 2 の期待利得 $u_2(\mathbf{p},\mathbf{q})$ [設問 8: 2 点] とを正解候補から選べ:

設問 7–8 の正解候補: (1) 1/4, (2) 1/3, (3) 1/2, (4) 2/3, (5) 3/4, (6) 1, (7) 4/3, (8) 3/2, (9) 2, (0) 以上の候補以外.

問題 4. (i) 以下の命題 a, b, c の真偽の組 (a の真偽，b の真偽，c の真偽) を正解候補 (設問 10 と共通) から選べ [設問 9: 5 点]:
a. (強) 支配される戦略がナッシュ均衡にふくまれることはない.
b. (強) 支配戦略の組はナッシュ均衡になるとはかぎらない.
c. ある混合戦略が相手のある戦略にたいする最適反応であるとき，その混合戦略にふくまれる純粋戦略 (その混合戦略が正の確率を与える純粋戦略) はどれも，相手のその戦略にたいする最適反応である.

(ii) 以下の命題 d, e, f の真偽の組 (d の真偽，e の真偽，f の真偽) を正解候補から選べ [設問 10: 5 点]:
d. 囚人のジレンマの有限回繰り返しゲームでは，毎期裏切り (自白) をとりつづける戦略の組は部分ゲーム完全均衡である．
e. 囚人のジレンマの無限回繰り返しゲームで割引因子 δ がじゅうぶん大きければ，毎期裏切り (自白) をとりつづける戦略の組以外の部分ゲーム完全均衡が存在する．
f. 囚人のジレンマの有限回繰り返しゲームで割引因子 δ がじゅうぶん大きければ，毎期裏切り (自白) をとりつづける戦略の組以外の部分ゲーム完全均衡が存在する．

設問 9–10 の正解候補: (1) 真真真, (2) 真真偽, (3) 真偽真, (4) 真偽偽, (5) 偽真真, (6) 偽真偽, (7) 偽偽真, (8) 偽偽偽.

問題 5. 図 3 の 4 つのゲームを考える．

ゲーム 1

	L	R
U	$2,2$	$1,3$
D	$3,1$	$0,0$

ゲーム 2

	L	R
U	$4,4$	$1,6$
D	$6,1$	$2,2$

ゲーム 3

	L	R
U	$2,2$	$0,0$
D	$0,0$	$1,1$

ゲーム 4

	L	R
U	$1,2$	$0,0$
D	$0,0$	$2,1$

図 3: 問題 5 の 4 つのゲーム．プレーヤー 1 は U か D を，プレーヤー 2 は L か R を選ぶ．

以下のそれぞれの命題 a, b, c について，もしその命題が偽ならば**反例**(その命題が**偽であることをしめす例**) を正解候補 (1)–(4) からすべて選べ．ただし反例があがっていなければ (5) を選べ．もしその命題が真であるならば，正解候補 (6) を選べ．純粋戦略の範囲で考えればよい．
a. ナッシュ均衡から 1 人のプレーヤーが離れる (戦略を変える) ことによって (離れた先がべつのナッシュ均衡でも構わない)，そのプレーヤーの利得が改善されることはない [設問 11: 5 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点].
b. ナッシュ均衡から同時に 2 人が離れる (戦略を変える) ことによって (離れた先がべつのナッシュ均衡でも構わない)，その 2 人の利得が両方とも改善されることはない [設問 12: 5 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点].
c. 戦略形ゲームに複数のナッシュ均衡があるとき，特定のプレーヤーの利得はそれらどの均衡においても等しい [設問 13: 5 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点].

設問 11–13 の正解候補: (1) ゲーム 1, (2) ゲーム 2, (3) ゲーム 3, (4) ゲーム 4, (5) 命題は偽であるが，これら 4 つのゲームのなかには反例が存在しない，(6) 命題が真であるため，反例が存在しない．

問題 6. 図 4 の展開形ゲームを考える．ただし U, D はプレーヤー 1 の最初の選択肢，L, R は 2 度目の選択肢で，t, b はプレーヤー 2 の選択肢である．点線で結ばれた 2 点はプレーヤー 1 の情報集合を表し，端点の数字のペアはプレーヤー 1 の利得とプレーヤー 2 の利得をこの順序で記入している．

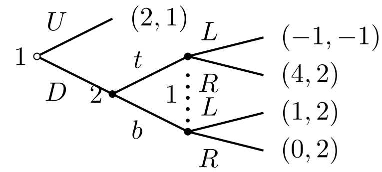

図 4: 問題 6 のゲーム

(i) このゲームに全体ゲーム以外の部分ゲームはいくつあるか [設問 14: 2 点]: (1) 1 個, (2) 2 個, (3) 3 個, (4) 4 個, (5) 5 個, (6) 6 個, (7) 7 個, (8) 8 個, (9) 9 個, (0) 0 個.

(ii) このゲームの純粋戦略による部分ゲーム完全均衡を以下からすべて選べ [設問 15: 7 点; 均衡が存在しないばあいは (9) を，存在するばあいはそれらすべてを (1)–(8) から選ぶこと; すべての正解を選んだばあいのみ得点]: (1) (UR, t), (2) (UR, b), (3) (UL, t), (4) (UL, b), (5) (DR, t), (6) (DR, b), (7) (DL, t), (8) (DL, b), (9) 存在しない.

問題 7. 図 5 の展開形ゲームを考える．ただし U, M, D はプレーヤー A の選択肢で，l, r はプレーヤー B の選択肢である．また，点線で結ばれた 2 点は B の情報集合を表し，端点の数字のペアは A の利得と B の利得をこの順序で記入している．

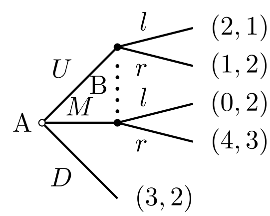

図 5: 問題 7 のゲーム

(i) プレーヤー B の情報集合における B の信念を $(q, 1-q)$ とする; ただし q は上の点 (A が U を選んだばあい) にいる確率で，$0 \leq q \leq 1$ である．このとき B の最適な選択について正しいものを以下から 1 つ選べ [設問 16: 2 点]: (1) q の値にかかわらず l を選ぶのが最適, (2) q の値にかかわらず r を選ぶのが最適, (3) q がある値 t $(0 < t < 1)$ より大きければ l を選ぶのが最適で，t より小さければ r を選ぶのが最適, (4) q がある値 t $(0 < t < 1)$ より大きければ r を選ぶのが最適で，t より小さければ l を選ぶのが最適.

(ii) このゲームの完全ベイジアン均衡における戦略の組と B の信念とを以下から選べ [設問 17: 7 点; 戦略の組を (1)–(7) から 1 つ，信念を (8)–(0) から 1 つ，合計 2 つを正しく選んだときのみ得点]: (1) (U, l), (2) (U, r), (3) (M, l), (4) (M, r), (5) (D, l), (6) (D, r), (7) 存在しない, (8) $(0, 1)$, (9) $(1, 0)$, (0) 任意の $(q, 1-q)$.

問題 8. 室温が 0 度から 50 度の範囲で自由にコントロールできる，冷暖房完備の部屋の温度設定を考える．こ

の部屋には 5 人のプレーヤーがいて，それぞれが自分にとって最適な室温をこの範囲に持っており，その温度から離れれば離れるほど快適さは下がる (単峰型の効用) とする．各人は自分の快適さを最大化しようとするものとする．各人に自分の最適室温を報告してもらい，それらの温度の中央値 (median) に室温を設定するルールを考える．

(i) 全員がじっさいに本当の最適室温を報告したところ，報告温度が低いほうから $a < b < c < d < e$ となった．このとき室温を c 度に設定することになる．いま c 未満の任意の温度 y (ただし $0 \le y < c \le 50$) と c とを多数決投票にかけるとき，c に投票すると**確定的にいえる**のは以下のどのプレーヤーか．[**設問** 18: 5 点; すべての正解を選んだばあいのみ得点]: (1) a を報告したプレーヤー，(2) b を報告したプレーヤー，(3) c を報告したプレーヤー，(4) d を報告したプレーヤー，(5) e を報告したプレーヤー，(6) c に投票することが確定的なプレーヤーは存在しない．

(ii) プレーヤー i の報告する温度を x_i とするとき，$0 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < 50$ をみたすようにプレーヤー 2–5 の戦略が与えられている．プレーヤー 1 の本当の最適室温を p_1 とすると，$p_1 < x_3$ となるとする．プレーヤー 1 が戦略 $x_1 = p_1$ を取ったときに設定される室温を正解候補 (設問 20 と共通) からえらべ [**設問** 19: 4 点]．

(iii) 問 (ii) と同じ状況で $x_1' \neq p_1$ という温度を報告する別戦略を考える．最終的に設定される室温は x_1' の値 (ただし $0 \le x_1' \le 50$) におうじて決まり，ある範囲内に収まるという．最終的に設定される室温の下限 (最小値) と上限 (最大値) とを正解候補から選べ [**設問** 20: 5 点; 下限と上限のそれぞれ，合計 2 つを正しくマークしたばあいのみ得点]:

設問 19–20 の正解候補: (1) x_1, (2) x_1', (3) x_2, (4) x_3, (5) x_4, (6) x_5, (7) 0, (8) 50.

問題 9. ホテリングモデルを考える．プレーヤー 1 と 2 (アイスクリーム屋) が区間 $[0, 1] = \{x : 0 \le x \le 1\}$ で表される 1 キロメートルの砂浜に立地しようとしている．客は区間上に一様に分布しており，2 軒のうち近い方の店でアイスクリームを 1 つだけ買うとする．プレーヤー i の利得 $u_i(x_1, x_2)$ である，客数の割合 (0 と 1 の間の数) はそれぞれのプレーヤーの立地点 (戦略) x_1, x_2 によって決まる．もし 2 軒が同じ地点に立地していれば，それぞれの利得は 1/2 とする．

(i) プレーヤー 2 の立地点 $x_2 = 0.5$ のとき，プレーヤー 1 が利得 0.2 を得るには自分の立地点 x_1 をどこに選べばよいか．ただし $x_1 \le x_2$ とする．[**設問** 21: 3 点]

(ii) プレーヤー 2 の立地点 $x_2 = 0.5$ のとき，プレーヤー 1 が利得 0.3 を得るには自分の立地点 x_1 をどこに選べばよいか．ただし $x_1 \le x_2$ とする．[**設問** 22: 3 点]

設問 21–22 の正解候補: (1) そのような x_1 は存在しない, (2) 0, (3) 0.1, (4) 0.2, (5) 0.3, (6) 0.4, (7) 0.5.

(iii) プレーヤー 2 の立地点 $x_2 = 0.9$ のとき，プレーヤー 1 が利得 0.88 を得るには自分の立地点 x_1 をどこに選べばよいか．[**設問** 23: 3 点]

(iv) プレーヤー 2 の立地点 $x_2 = 0.9$ のとき，プレーヤー 1 が利得 0.9 を得るには自分の立地点 x_1 をどこに選べばよいか．[**設問** 24: 3 点]

設問 23–24 の正解候補: (1) そのような x_1 は存在しない, (2) 0.82 以下, (3) 0.83, (4) 0.84, (5) 0.85, (6) 0.86, (7) 0.87, (8) 0.88, (9) 0.89, (0) 0.9.