

ゲーム理論: 補助教材

三原麗珠*

reiju@ec.kagawa-u.ac.jp (H. Reiju Mihara)

香川大学大学院地域マネジメント研究科

2004 年 5 月のバージョン

目次

1	2004 年度ゲーム理論受講者へ	1
2	戦略形ゲーム	3
3	展開形ゲーム	10
4	情報不完備ゲーム	14
5	追加問題	15

1 2004 年度ゲーム理論受講者へ

2004 年度前期のゲーム理論 (共通科目 数学 B) の授業で配布する予定のハンドアウト, 必読文献, 宿題をまとめておく. 変更があるばあいは, Web 上の講義ページでアナウンスし, 授業中にも注意を喚起する.

まず, 授業で配布するハンドアウトをすべて列挙する:

- 三原麗珠. ゲーム理論: 補助教材, 2004 年のバージョン (15 ページ)
- 手書きノート (6 ページ)
 - ホテリングモデルにかんするメモ 1 ページ分 (p. 7)
 - ルービンシュタイン交渉ゲームにかんするメモ 2 ページ分 (pp. 8-9)
 - 就職市場のシグナリング・ゲームにかんするメモ 3 ページ分 (pp. 10-12)

*<http://www.ec.kagawa-u.ac.jp/~reiju/>

- 演習問題の正解 (16+1 ページ) 以下 1 ページ分をいっしょに綴じてある: 「オークション 2」 from the Web page: An Introduction to Game Theory

次に, 上記ハンドアウト以外の必読文献を以下に挙げる. これらは図書館にリザーブ (館外持ち出し不可) してある. 各自購入するか, 図書館で閲覧して欲しい:

- 中山幹夫 [4]. はじめてのゲーム理論. (2000 円, 生協の書籍部で販売; 417.2/N45; 5 冊あり; 3 冊リザーブ). 1, 2, 3, 4, 7 章の大部分が必読. 不要な部分は講義ページまたは授業で指示する.
- 武藤滋夫 [3]. ゲーム理論入門. (860 円, 生協の書籍部で販売; 331.19/Mu93; 6 冊あり; 3 冊リザーブ) I 章から IV 章をあつかう. 演習問題とその答にかかわる部分は必読.
- 梶井厚志, 松井彰彦 [1]. ミクロ経済学: 戦略的アプローチ. (NDC8:331/Ka22; 5 冊あり; 3 冊リザーブ) 以下が必読:
 - ホテリングモデル: 13.1 節 (238–242 頁), 251 頁, 305 頁. (訂正あり: 240 頁本文最後の行の「 $\frac{1-(y_1+y_2)}{2}$ 」は「 $1 - \frac{(y_1+y_2)}{2}$ 」に修正; 241 頁 12 行目も同様.)
 - ルービンシュタイン交渉ゲーム: 4.2–4.3 節 (61–65 頁).
 - 就職市場のシグナリング・ゲーム: 第 5 章 特に 5.1 節 (75–77 頁) と 5.4–5.5 節 (85–93 頁), 296 頁.

最後に, 宿題を授業の進行順にほぼ合わせて挙げる. 提出は求めないが, これらは試験問題の類題であることに注意. きちんとマスターしておかなければ, 試験で合格点を確保できないだろう.

- 補助教材 演習 2.1–2.8 (似た問題が多いので, 以下の 3 題だけでもいい: 2.4, 2.6, 2.8)
- 武藤 68 頁, 練習問題 1, 2
- 補助教材 演習 2.9, 2.10 (この 2 題はやや発展的)
- 補助教材 演習 3.1–3.8
- 武藤 114–5 頁 練習問題 1–5
- 補助教材 演習 4.3–4.7
- 武藤 135 頁 練習問題 1, 2
- 補助教材 演習 3.10 [梶井・松井練習問題 13.1, 13.2]

- 補助教材 演習 3.13
- 補助教材 演習 4.8 [梶井・松井練習問題 5.3]
- 補助教材 追加問題

2 戦略形ゲーム

このセクションでは非協力ゲーム理論 (noncooperative game theory) のうち、行動決定が同時に行われる場合をあつかう。

最初に、非協力ゲーム理論の分野でもっとも有名な例である囚人のジレンマ (The Prisoner's Dilemma) を考える。「ジレンマ」とは窮地、板挟み、困難な状況のこと。

ある犯罪の容疑者 2 人 (じつは共犯) が別件で逮捕された。自白を引き出すために、取り調べ人 (検事?) は 2 人を隔離してそれぞれの容疑者に脅し (はったり?) をかける (共犯であることは見抜いている; あとは自白が欲しい):

- 2 人とも黙秘を続ければともに 1 年の刑 (別件で) ,
- 1 人だけが自白すれば直ちに釈放で相手は 9 年の刑 ,
- 2 人とも自白すればともに 6 年の刑になる .

この状況を非協力ゲーム理論の言葉に直そう。(具体的なシチュエーションである上の寓話を一步抽象化したいわけ。具体的ケースをたくさん並べることに終わってはいは大学で勉強する意味が半減するでしょ?)

この戦略ゲーム (strategic game) の

- プレーヤー (players) は囚人 1 と囚人 2 で ,
- それぞれのプレーヤーは 黙秘 と 自白 という 2 つの 戦略 (strategies) を持つ .
- 2 人の戦略の組 (ペア) のおののにたいして、それぞれのプレーヤーの利得 (payoff) を表 (利得行列) にすれば下のようになる。たとえば戦略ペア 黙秘, 自白 —つまり囚人 1 が黙秘して囚人 2 が自白する状況—での利得の組は $(-9, 0)$ 。(刑期をマイナスの利得とみなしている。)

		囚人 2	
		黙秘	自白
囚人 1	黙秘	-1, -1	-9, 0
	自白	0, -9	-6, -6

(後述するように、この特定の利得行列で表されたゲームはさまざまな具体的シチュエーションを抽象化している。しかしわれわれはこの行列で表された特定のゲーム以外のさまざまなゲーム (たとえば後で述べる Battle of the Sexes) をも同時に考えるための言葉が欲しい。よって抽象化をさらにすすめてみよう。そのために、以下ではゲームを一般的に定義することにする。「ここまで極端に抽象化をする必要があるのか!」と思うかもしれない。たしかに実社会で接するレベルの抽象度は超えている。しかしせっかく大学に来たんだから、またとない機会だと思ってついてきて欲しい。世界の見え方が変わってくるかもしれないよ。)

戦略形ゲーム (strategic game) とは以下の要素からなる組 $(S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ である:

- 集合 $\{1, \dots, n\}$ (プレーヤー (players) の集合)
- それぞれのプレーヤー i について、集合 S_i (プレーヤー i の戦略集合 (set of strategies))
- それぞれのプレーヤー i について、実数値関数 $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbf{R}$ (プレーヤー i の効用関数 (utility function), あるいは利得関数 (payoff function)).¹

戦略の組 (戦略プロファイル) (s_1, \dots, s_n) が選ばれたときのプレーヤー i の利得は $u_i(s_1, \dots, s_n)$ になる。利得関数の代わりに、戦略集合 $S_1 \times \dots \times S_n$ 上で定義された「選好」を考えることもある。

例 2.1 囚人のジレンマでは、 $S_1 = S_2 = \{ \text{黙秘}, \text{自白} \}$ 。利得関数は u_1, u_2 はたとえば $u_1(\text{黙秘}, \text{自白}) = -9$ や $u_2(\text{黙秘}, \text{自白}) = 0$ という値をとる。||

リマーク 2.1 2人のプレーヤーからなる戦略形ゲームは利得行列で表せた。いま利得行列のそれぞれの桁目に、その桁目に対応する戦略ペアが取られたときの (利得ペアのかわりに) 結果 (アウトカム) を記入する。こうやって得られる表をゲーム・フォーム (ゲーム形式, game form) とかメカニズム (mechanism) とよぶ。たとえば2車線道路のある地点での対向車の運命は以下のゲーム・フォームで与えられる:

		ドライバー 2	
		左側	右側
ドライバー 1	左側	無事	衝突
	右側	衝突	無事

||

¹集合 $S_1 \times \dots \times S_n := \{(s_1, \dots, s_n) : s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n\}$ を集合 S_1, \dots, S_n の直積 (direct product) とよぶ。この集合の要素 (s_1, \dots, s_n) を戦略プロファイル (strategy profile) とよぶ。

囚人のジレンマの分析に戻る。「2人の囚人は脅しを本気にして、できるだけ自分の刑期を短くしたいと考える」と仮定。つまりこのゲームを信じ、自分の利得を最大化したいと。すると

- 2人が隔離されている状況では、合理的なプレーヤは自白を選ぶだろう。相手が黙秘しようが自白しようが、自分は自白したほうが有利(利得が高い)だから。(演習: 表でチェックせよ。)
- その結果実現する戦略ペアは 自白, 自白 で利得のペアは $(-6, -6)$ 。
- ところがふたりがともに黙秘する戦略ペア 黙秘, 黙秘 にたいする利得ペアは $(-1, -1)$ 。この方がどちらのプレーヤにとってもより望ましい。「黙秘, 黙秘 は 自白, 自白 よりもパレート優位 (Pareto-superior) である」という。)

協力しあえばプレーヤー全員に利益があるのに、それぞれのプレーヤーが相手に「ただ乗り (free riding)」しようとしてしまうため、その利益を実現できない。現実社会でもこの種のジレンマはいろいろある。国際紛争、ゴミ収集所の清掃、など。

囚人のジレンマでは、囚人1にとって 自白 が支配戦略 (dominant strategy): (囚人2の戦略がなんであっても) 囚人1は 自白 という戦略を選ぶのが有利になっている。囚人2にとっても 自白 が支配戦略になっている。

ノテーション (記号): i 以外のプレーヤーの戦略集合の直積 $S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$ を S_{-i} , その要素を s_{-i} などと書く。たとえば4人のばあい, $s_{-2} = (s_1, s_3, s_4)$, $(s'_2, s_{-2}) = (s_1, s'_2, s_3, s_4)$, $s_{-4}^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$ 。

定義 2.1 戦略形ゲーム $(S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ が与えられているとする。

次の不等式群がみたされるとき、戦略 $s_i \in S_i$ が戦略 $s'_i \in S_i$ を (強) 支配する ((strictly) dominates) という: すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ にたいして、

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}).$$

次の (i), (ii) の不等式群がみたされるとき、戦略 $s_i \in S_i$ が戦略 $s'_i \in S_i$ を弱支配する (weakly dominates) という: (i) すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ にたいして、 $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$; (ii) ある $s_{-i} \in S_{-i}$ にたいして、 $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$ 。

戦略 $s_i \in S_i$ が個人 i の支配戦略 (dominant strategy) であるとは、 s_i が s_i 以外のすべての戦略 $s'_i \in S_i$ を支配していることをいう。[武藤 33—34; 文献によって少々条件がちがう。]

リマーク 2.2 戦略 $s_i \in S_i$ が戦略 $s'_i \in S_i$ を支配するとき、 s_i は s'_i を弱支配すると当然いえる。しかし s_i が s'_i を弱支配するとき、支配するとはかぎらない。||

リマーク 2.3 2人ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ のばあい, プレーヤー 1 の戦略 $s'_1 \in S_1$ がプレーヤー 1 の戦略 $s''_1 \in S_1$ を支配するのはつぎの条件がみたされるとき: プレーヤー 2 のすべての戦略 $s_2 \in S_2$ にたいして,

$$u_1(s'_1, s_2) > u_1(s''_1, s_2).$$

たとえば, 囚人のジレンマではプレーヤー 1 の 自白 がプレーヤー 1 の 黙秘 を支配:

$$u_1(\text{自白}, \text{黙秘}) > u_1(\text{黙秘}, \text{黙秘})$$

$$u_1(\text{自白}, \text{自白}) > u_1(\text{黙秘}, \text{自白})$$

||

例 2.2 つぎのゲーム (男女の闘い; Battle of the Sexes; Bach or Stravinsky) ではいずれのプレーヤーも支配戦略を持たない (演習: 説明せよ):

		ふみ	
		Bach	Stravinsky
いちろう	Bach	2, 1	0, 0
	Stravinsky	0, 0	1, 2

- ふみが Bach という戦略を選んだとき, いちろうの利得を最大にする戦略は Bach になっている. (「ふみの Bach という戦略にたいするいちろうの最適反応 (best response) は Bach である」という.)
- 逆に, いちろうが Bach という戦略を選んだとき, ふみの利得を最大にする戦略は Bach になっている.
- 戦略のペア (s, s') がたがいに相手の戦略にたいする最適反応からなっているとき (つまり s は s' にたいする最適反応, s' は s にたいする最適反応), そのペアをナッシュ均衡 (Nash Equilibrium) とよぶ! おたがいがナッシュ均衡を構成する戦略をとっているかぎり, どちらもそのペアを離れる誘因はない」という意味で, 安定したペアである.
- Bach, Bach はこのゲームのナッシュ均衡である.
- Stravinsky, Stravinsky もナッシュ均衡である.
- これら以外にナッシュ均衡はない.

||

定義 2.2 戦略形ゲーム $(S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ が与えられているとする. プレーヤー i の戦略 $s_i \in S_i$ が他のプレーヤーのとり戦略 $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$

にたいする最適反応 (best response) であるとは, すべての $s'_i \in S_i$ にたいして,

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

であること .

リマーク 2.4 2人ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ のばあい, プレーヤー 1 の戦略 $s'_1 \in S_1$ がプレーヤー 2 の戦略 $s_2 \in S_2$ にたいする最適反応であるとは, すべての $s''_1 \in S_1$ について,

$$u_1(s'_1, s_2) \geq u_1(s''_1, s_2)$$

となること . ||

演習 2.1 ふみの Bach にたいするいちろうの最適反応 (best response) は Bach であることをチェックせよ .

定義 2.3 戦略プロファイル $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ がナッシュ均衡 (Nash Equilibrium) であるとは, おのおののプレーヤー i について, 戦略 s_i^* が他のプレーヤーのとり戦略 $s_{-i}^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ への最適反応となっていること .

演習 2.2 (i) 以下の利得表で表わされるゲームを考える . 沙理さんが行 (上か下) を選び, 粕さんが列 (左か右) を選ぶものとする (マス目の最初の数字は沙理さんの利得, 2 番目の数字は粕さんの利得) .

	左	右
上	14, 14	7, 17
下	17, 7	10, 10

沙理さんの支配戦略について正しいものを選び .

- シ . 沙理さんの支配戦略は上である .
- ハ . 沙理さんの支配戦略は下である .
- イ . 沙理さんの支配戦略は (下, 右) である .
- カ . 沙理さんの支配戦略は存在しない .

(ii) 問題 (i) のゲームにかんする記述のうち正しいものを選び . [パレート優位, パレート効率が未定義 .]

- パ . (上, 左) は (下, 左) にたいしてパレート優位である .
- ユ . (下, 左) は (下, 右) にたいしてパレート優位である .
- ウ . (下, 右) はパレート効率である .
- イ . (下, 左) はパレート効率である .

演習 2.3 囚人のジレンマを考える . 囚人 2 の戦略 黙秘 にたいする囚人 1 の最適反応はなにか? 囚人 2 の戦略 自白 にたいする囚人 1 の最適反応はなにか? このゲームにナッシュ均衡は存在するか? 存在するならばすべて列挙せよ .

演習 2.4 戦略形ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ が与えられている。戦略プロファイル $s = (s_1, s_2)$ がナッシュ均衡であるとは、以下のどの条件をみたすことか:

- (1) $u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s'_1, s_2)$ for all $s'_1 \in S_1$
and $u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s'_1, s_2)$ for all $s'_1 \in S_1$.
- (2) $u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s_1, s'_2)$ for all $s'_2 \in S_2$
and $u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1, s'_2)$ for all $s'_2 \in S_2$.
- (3) $u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s'_1, s'_2)$ for all $s'_1 \in S_1, s'_2 \in S_2$
and $u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s'_1, s'_2)$ for all $s'_1 \in S_1, s'_2 \in S_2$.
- (4) $u_1(s_1, s_2) \geq u_1(s'_1, s_2)$ for all $s'_1 \in S_1$
and $u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1, s'_2)$ for all $s'_2 \in S_2$.

演習 2.5 以下のゲームを考える。

		Player 2		
		l	m	r
Player 1	u	1, -1	1, -1	1, 1
	d	100, 0	0, 100	-1, 1

- (i) Player 1 の戦略 u にたいする Player 2 の最適反応を以下のリスト [次の設問と共通] から選べ。
- (ii) Player 2 の支配戦略を以下のリストから選べ。
 - (1) 戦略 u , (2) 戦略 d , (3) 戦略 l , (4) 戦略 m , (5) 戦略 r , (6) 存在しない。
- (iii) このゲームの (純粋戦略による) ナッシュ均衡は
 - (1) (u, l) だけである, (2) (u, m) だけである, (3) (u, r) だけである, (4) (d, l) だけである, (5) (d, m) だけである, (6) (d, r) だけである, (7) 存在しない。

演習 2.6 以下のゲームを考える。

		Player 2		
		l	m	r
Player 1	U	2, 3	3, 2	0, 0
	M	1, -1	1, -1	1, 1
	D	2, 1	1, 2	-1, 1

- (i) Player 1 の戦略 U にたいする Player 2 の最適反応を以下の正解候補 [設問 (ii) と共通] から選べ。
- (ii) Player 2 の支配戦略を以下の正解候補から選べ。

設問 (i), (ii) の正解候補: (1) 戦略 U , (2) 戦略 M , (3) 戦略 D , (4) 戦略 l , (5) 戦略 m , (6) 戦略 r , (7) 存在しない。
- (iii) Player 1 の戦略 U は M を支配するか? 弱支配するか? Player 1 の戦略 U は D を支配するか? 弱支配するか?
- (iv) このゲームの (純粋戦略による) ナッシュ均衡を以下の正解候補から選べ。 [すべての正解候補を選んだ場合のみ得点]

設問 (iv) の正解候補 (均衡が存在しない場合は (0) を, 存在する場合はそれらすべて (1 つとは限らない) を (1)–(9) から選ぶこと): (1) (U, l) , (2) (U, m) , (3) (U, r) , (4) (M, l) , (5) (M, m) , (6) (M, r) , (7) (D, l) , (8) (D, m) , (9) (D, r) , (0) 存在しない.

演習 2.7 以下のゲームを考える.

		Player 2		
		s_2	t_2	u_2
Player 1	s_1	1, -1	1, -1	1, 1
	t_1	100, 0	0, 100	-1, 1
	u_1	0, 100	100, 0	-1, 1

Player 2 の戦略 t_2 にたいする Player 1 の最適反応は_____である.
 Player 1 の戦略 t_1 にたいする Player 2 の最適反応は_____である.
 このゲームの (純粋戦略による) ナッシュ均衡は_____である.
 (たとえば「 $(s_1, s_2), (s_1, t_2)$ 」のように, すべてのナッシュ均衡を挙げること.)

次に簡単な真偽問題を載せる. 試験では複数の真偽問題を組みあわせて出題することが多いので注意. また, 反例などによって簡単に理由があげられるばあい, 試験では理由を問うかもしれない.

演習 2.8 以下のそれぞれのステートメントの真偽を答えよ.

- 非協力ゲーム理論は, プレーヤーたちがどのように協力を実現できるかを分析できない.
- (強) 支配される戦略がナッシュ均衡にふくまれることはない.
- (強) 支配戦略の組はナッシュ均衡になるとはかぎらない.
- 戦略 s_1 が戦略 s'_1 を (強) 支配するとき, 戦略 s_1 は戦略 s'_1 を弱支配する.
- 弱支配戦略は他のプレーヤーの任意の戦略にたいする最適反応である.
- ある混合戦略が相手のある戦略にたいする最適反応であるとき, その混合戦略にふくまれる純粋戦略 (その混合戦略が正の確率を与える純粋戦略) はどれも, 相手のその戦略にたいする最適反応である.
- ナッシュ均衡から 1 人のプレーヤーが離れる (戦略を変える) ことによって, そのプレーヤーの利得が改善されることはない.
- ナッシュ均衡から同時に 2 人が離れる (戦略を変える) ことによって, その 2 人の利得が両方とも改善されることはない.
- 戦略形ゲームに複数の均衡があるとき, 特定のプレーヤーの利得はそれらどの均衡においても等しい.
- もし (s_1, s_2) と (s'_1, s'_2) がナッシュ均衡であるとき, (s'_1, s_2) または (s_1, s'_2) もナッシュ均衡である.

以下 2 題はややすんだ演習問題．学生の答案作成能力や採点の手間などを考えると，試験でこのままの形で出すには厳しいものがある．必要な条件が抜けているなど，設問に不完全な部分があれば適当に補って答えよ．

演習 2.9 室温が 0 度から 50 度の範囲で自由にコントロールできる，冷暖房完備の部屋の温度設定を考える．この部屋には 5 人がいて，それぞれが自分にとって最適な室温をこの範囲に持っており，その温度から離れれば離れるほど快適さは下がる (単峰型の効用) とする．もちろん各人は自分の快適さを最大化しようとするものとする．

(i) 各自に自分の最適室温を報告してもらって，室温をそれらの平均値に設定する決め方を採用したとする．このとき，みんないつも本当の最適室温を報告しようとする (その決め方が「戦略的操作にたえる」) といえるか? 各自の戦略集合を $[0, 50] = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 50\}$ とし (戦略は室温を表す)，自分の本当の最適室温を報告するのが弱支配戦略であるかどうかをしめせ．

(ii) 各自に自分の最適室温を報告してもらおうとし，全員がじっさいに本当の最適室温を報告すると仮定する．どのような決め方を採用すれば，その決め方で定まる室温が他の室温に (1 対 1 の) 単純多数決で負けることがないようにできるか?

(iii) 問題 (ii) では全員が本当の最適室温を報告すると仮定した．じっさいはどうだろうか? 問題 (ii) で答えた決め方を採用したとき，みんないつも最適室温を報告しようとするといえるか? 自分の本当の最適気温を報告するのが弱支配戦略であるかどうかをしめせ．

演習 2.10 2 人以上の入札者が，セカンドプライス・オークションに参加している．これは参加者が入札額を他の参加者に分からないように紙に書いて競り人に渡し，いちばん高い額をつけた参加者が落札する封印入札方式である．ただし，落札者が支払うべき価格は，落札者以外の参加者のつけた額でいちばん高いもの (2 番目に高い入札額) となる．もし最高入札額を提示した参加者が複数のばあい，その中からくじ引きで落札者を決め，支払うべき価格はその最高額とする．入札者 1 の評価額 (当該商品を得るために払ってもよいと思っている上限価格) が v_1 のとき，どのような入札額 b_1 を提示するのがいいか? 入札額として，評価額 v_1 をそのまま提示する戦略が弱支配戦略であるかどうかをしめせ．ただし落札しなかったときの利得をゼロとし，落札したときの利得を評価額から支払額を引いた値とする．

3 展開形ゲーム

「武藤」とあるのは，武藤『ゲーム理論入門』[3] のこと．まず武藤章末の練習問題より易しめの問題を列挙する．

演習 3.1 武藤の事例 3-1(p. 71) と事例 2-1 (p. 25) をそれぞれ展開形ゲームで表現せよ。[正解はそれぞれ図 3-1 と図 3-2.]

演習 3.2 武藤の図 3-3 (p. 79) の展開形ゲームを戦略形ゲーム表現に直せ。B の戦略をすべて列挙せよ。B の「維持-引き下げ(維下)」という戦略を展開形ゲーム上に表現せよ。[正解は表 3-1。「維下」という戦略は図 3-3 では点線で表現されている.]

演習 3.3 武藤の図 3-4 (p. 83) の展開形ゲームを戦略形ゲーム表現に直せ。純粋戦略によるナッシュ均衡をすべて列挙せよ。[正解は表 3-2 と p. 83 本文.]

演習 3.4 武藤の事例 3-6 (p. 87) のケース 1 とケース 2 のそれぞれを情報集合に注意しながら展開形ゲームで表現せよ。それぞれのケースについて、全体ゲーム以外の部分ゲームをすべて特定せよ。それぞれのケースについて、プレイヤー C の純粋戦略の個数を求めよ。[正解: 図 3-9(矢印と枝の数字は無視)と本文 pp. 88-89。全体ゲーム以外の部分ゲームについてはケース 1 では 6 個、ケース 2 では 2 個を特定すればいい。プレイヤー C の純粋戦略の個数はケース 1 では $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 個、ケース 2 では $2 \times 2 = 4$ 個.]

演習 3.5 武藤の図 3-11 (p. 97) の展開形ゲームで、利得が一部欠けているとする。利得を記入してゲームを完成せよ。そして部分ゲーム完全均衡を求めよ。[正解: 利得はその図のとおり。本文の説明を参照。部分ゲーム完全均衡は p. 98 の本文にある.]

演習 3.6 武藤の事例 3-5(p. 72) の 2 期間のケースを展開形ゲームで表現せよ。ただし割引因子を δ とする。このゲームには全体ゲーム以外の部分ゲームがいくつあるか。[正解: 図 3-12。全体ゲーム以外の部分ゲームは 4 個.]

演習 3.7 武藤の表 2-1 (p. 31) の戦略形ゲームを無限回繰り返す繰り返しゲームを考える。利得は割引因子 δ をもちいて p. 105 で与えられる平均利得で定義する。

(i) 2 人のプレイヤーがトリガー(永久懲罰)戦略をとるときのプレイは每期「維持」をとりつづけることになることを確認せよ。

(ii) トリガー戦略の組がナッシュ均衡であることをしめそう。いま B がトリガー戦略をとっているとする。このとき、A がトリガー戦略をとったときの利得と t 期にトリガー戦略を逸脱したときの利得を比べることにより、トリガー戦略が確実に A の最適反応になるための δ の値の範囲をもとめよ。

[正解: p. 106 の下から第 2 パラグラフ。pp. 106-108.]

演習 3.8 以下のそれぞれのステートメントの真偽を答えよ。

a. 囚人のジレンマの有限回繰り返しゲームでは、每期裏切り(自白)をとりつづける戦略の組は部分ゲーム完全均衡である。

- b. 囚人のジレンマの有限回繰り返しゲームで割引因子 δ がじゅうぶん大きければ、每期裏切り (自白) をとりつづける戦略の組以外の部分ゲーム完全均衡が存在する .
- c. 囚人のジレンマの無限回繰り返しゲームでは、每期裏切り (自白) をとりつづける戦略の組は部分ゲーム完全均衡である .
- d. 囚人のジレンマの無限回繰り返しゲームで割引因子 δ がじゅうぶん大きければ、每期裏切り (自白) をとりつづける戦略の組以外の部分ゲーム完全均衡が存在する .

[正解: 真, 偽, 真, 真.]

演習 3.9 シュタッケルベルグの複占市場の部分ゲーム完全均衡 (武藤 pp. 111-114) における先導者である企業 A の利潤は、少なくともクルーノー・ナッシュ均衡における企業 A の利潤以上である理由をしめそう . シュタッケルベルグの複占市場では企業 A はクルーノー・ナッシュ均衡のときと同じ生産量 $x = (a - c)/3$ を選ぶことができたはずである . そのときの利潤はクルーノー・ナッシュ均衡のときの利潤 $u_A = (a - c)^2/9$ と同じになっていたはずである (設問: それをしめせ) . 生産量 x を選べば同じ利潤 u_A を得られたのに、企業 A はあえて x とは異なる生産量 $x^* = (a - c)/2$ を選んでいる . そのことからシュタッケルベルグの複占市場の部分ゲーム完全均衡における企業 A の利潤は少なくとも u_A 以上であることが分かる .

[正解: シュタッケルベルグの複占市場で企業 A が $x = (a - c)/3$ を選んだとすれば、企業 B は x にたいする最適反応 $y = (a - c)/3$ を選んだはずである . この y が x にたいする最適反応であることは、戦略のペア (x, y) がナッシュ均衡であることから分かる (武藤 p. 56) . 両企業の生産量がクルーノー・ナッシュ均衡のときと同じだから、企業 A はクルーノー・ナッシュ均衡のときと同じ利潤 u_A を得ることができたはずである .]

演習 3.10 梶井・松井 [1, p. 251] の練習問題 13.1 と 13.2. ホテリングモデルで 3 人あるいは 4 人競争するばあい . なお、消費者が自分の居場所にもっとも近い店を訪れることを前提とすれば、このゲームは 2 軒の店をプレイヤーとする戦略形ゲームとなり、部分ゲーム完全均衡のかわりにナッシュ均衡が適用できる .

演習 3.11 [議員報酬引き上げ点呼式投票 (Pay raise roll-call voting); Morrow [2], pp. 125-126] 3 人の議員からなる議会で、議員報酬の引き上げについて roll-call 方式 (公開で順番に投票; 自分より前に投票した議員の投じた票が分かる) で投票を行う . 3 人の議員はいずれも報酬引き上げを望んでいる (引き上げの利益を $b > 0$ とする) . その一方で、もし引き上げに投票すれば、有権者の反感を買うためのコスト c (ただし $b > c > 0$) を被るとする . いま投票する順番にしたがってプレイヤーを 1, 2, 3 と呼び、各プレイヤーは y (yes: 引き上げに賛成) または n (no: 引き上げに反対) のいずれか一方に投

票するとする。

(i) この状況を展開形ゲームで表現せよ。図 1 を完成させればよい。

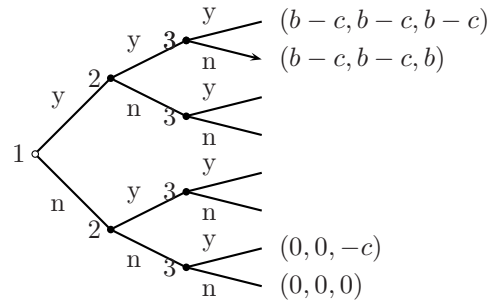


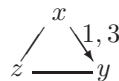
図 1: 議員報酬引き上げ点呼式投票

(ii) このゲームを逆向き帰納法 (backwards induction) で解くことにより、部分ゲーム完全均衡と均衡における利得列を求めよ。その際、おのおのの決定節 (点) で各プレイヤーが選ぶ選択枝 (行動) に対応する枝に矢印を記入せよ (プレイヤー 3 のいちばん上の決定節から出ている選択枝 n に対応する枝にある矢印が一例)。

(iii) 何番目に投票する議員がもっとも有利だといえるか?

演習 3.12 [複数段階投票手続と戦略的投票 (sophisticated voting); Morrow [2], p. 135, Example] 3人の投票者 (プレイヤー 1, 2, 3) が、選択枝 x, y, z からひとつ選ぶとしている。3人の選好は以下で表される: プレイヤー 1 が xyz (x, y, z の順で好ましい), プレイヤー 2 が yzx , プレイヤー 3 が zxy . いま次のようなアジェンダ (選択枝を比較する順序を定めた手続き) により多数決投票を行う: まず第一段階で y と z とで投票し、つぎに第二段階でその勝者と x とで投票して最終アウトカム (結果) を決める。

(i) 過半数のプレイヤーによる選好を x, y, z を点 (ノード) とする有向グラフ (たとえば 2人以上が x を y より好むならば、点 x から点 y に向かう矢印付きの枝を記入し、その xy という選好をもつプレイヤーの名前をその枝のラベルとして記入) で表せ。以下の図を完成させればよい。



(ii) このアジェンダを投票の木 (voting tree) で表現せよ。

(iii) 正直な投票 (sincere voting) によるアウトカムは何か?

(iv) 戦略的投票 (sophisticated voting) によるアウトカムは何か?

(v) 戦略的投票 (sophisticated voting) をしたとき、第一段階で自分の選好に

反する投票をするのはどのプレーヤーか?

(vi) 以上の結果を授業 (ノートの 44-46 ページ) で説明したアジェンダ (第一段階で x と y とで投票し, 第二段階でその勝者と z とで投票して最終アウトカムを決める) におけるアウトカムと比較し, 異なるアジェンダは異なるアウトカムを生じうることを確認せよ.

演習 3.13 [交渉ゲーム] 図 2 の展開形で表されるプレーヤー A と B の 2 段階交渉ゲームを考える. 第 1 ラウンドで B が x_2 をオファーし (ただし $0 \leq x_2 \leq 1$), A が a(accept; 承諾) または r(reject; 拒否) を選ぶ. A が r を選べば, 第 2 ラウンドで A が x_1 をオファーし (ただし $0 \leq x_1 \leq 1$), B が a(承諾) または r(拒否) を選んでゲームは終わる. 利得は A の利得, B の利得の順で表されている. また, 割引率 $\delta = 4/5$ で, 交渉が決裂したときの A の取り分はゼロだが, B の取り分は $1/5$ とする. このゲームの部分ゲーム完全均衡 (バックワード・インダクションの解) におけるオファー x_1 と x_2 の値を求めよ.

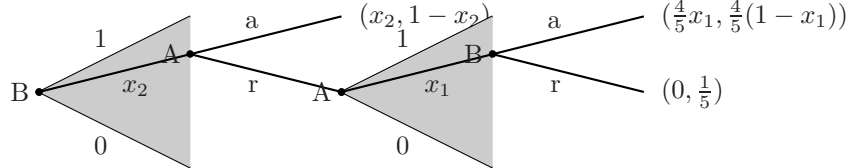


図 2: 2 段階交渉ゲーム

4 情報不完備ゲーム

演習 4.1 武藤の事例 4-1(p. 120) を戦略形ゲームとして表現せよ. 特にプレーヤー A の戦略とプレーヤー B の利得に注意せよ. [正解: 表 4-3. A の戦略はタイプ A1 のときの選択とタイプ A2 のときの選択をリストしたもの.]

演習 4.2 武藤の表 4-3 のベイジアンゲーム (p. 123) で, (下維, 維) がベイジアン均衡であることを確認せよ. (維維, 維) がベイジアン均衡でない理由を述べよ. [正解: 本文 pp. 124-5 参照.]

演習 4.3 武藤の事例 4-2 (p. 126) を展開形ゲームとして表現せよ. [正解: 図 4-3.]

演習 4.4 武藤の図 4-3 のゲーム (p. 127) において, プレーヤー A の情報集合での A の信念が $(r, 1-r)$ で与えられている. このとき A の期待利得を r の関数としてもとめ, その期待利得が最大になるような行動を r の値におうじて決定せよ. [正解: 本文 p. 128 第 4 パラグラフ.]

演習 4.5 武藤の図 4-3 のゲーム (p. 127) において, プレーヤー A の情報集合での A の信念が $(r, 1-r)$ で表されている. 強いタイプの B と弱いタイプの B のとりうる行動の組み (4 つある) のそれぞれにたいして整合的な A の信念をもとめよ. [正解: 本文 p. 128 第 5 パラグラフから p. 129.]

演習 4.6 武藤の図 4-3 のゲーム (p. 127) において, 強いタイプの B が「参入する」をとり, 弱いタイプの B が「参入しない」をとるような完全ベイジアン均衡をもとめよ. [正解: (A の行動, 強い B の行動, 弱い B の行動, A の信念) の組が (阻止, 参入する, 参入しない, $(1,0)$) となるのが均衡. 本文 p. 130 ケース 2 を参照.]

演習 4.7 武藤の図 4-3 のゲーム (p. 127) において, 強いタイプの B が「参入しない」をとるような完全ベイジアン均衡は存在しないことをしめせ. [正解: 強い B が参入しなければ利得は 0 で, 参入すれば利得は 1 または 3 となり, いずれにせよ参入したほうが利得が高い. 本文 pp. 130-1 ケース 3, 4 を参照.]

演習 4.8 [就職市場のシグナリングゲーム] 梶井・松井 [1, p. 93] の練習問題 5.3.

5 追加問題

演習問題を必要に応じて以下に追加するかもしれない.

参考文献

- [1] 梶井厚志, 松井彰彦. ミクロ経済学: 戦略的アプローチ. 日本評論社, 2000.
- [2] James D. Morrow. *Game Theory for Political Scientists*. Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [3] 武藤滋夫. ゲーム理論入門. 日本経済新聞社, 2001.
- [4] 中山幹夫. はじめてのゲーム理論. 有斐閣, 1997.