応用科目 資源配分の公理的分析: 公平の理論 期末試験
問題冊子・解答用紙 4 枚目中 1 枚目
香川大学大学院地域マネジメント研究科 2005 年度 後期
担当：三原麗珠

学籍番号 ______________________

受験者名 正解例

注意
a. 解答はこの用紙に直接記入して，提出すること．
b. 配点はそれぞれの問題のところにしめしている．合計 85 点満点である．

問題 1 [14 点]. 男性の集合を $M = \{A, B, C\}$，女性の集合を $W = \{1, 2, 3\}$ とする．

6pts (i) 以下の選好を考える (たとえば「$A : 213$」は男性 A が女性を 2, 1, 3 の順に好むという意味):

$A : 213$ $\quad 1 : ABC$
$B : 132$ $\quad 2 : CAB$
$C : 123$ $\quad 3 : ACB$

この選好にたいして，男性側がプロポーズするゲール・シャプレイ アルゴリズムを適用することにより，安定マッチングを見つけよ．途中経過も記述すること．[いちぶだけ行列で書いているので，空白を埋めて続きを書くこと．アルゴリズムが停止するまで続けて得られた行列を，解答のマッチングとしてよい．]

$$\begin{pmatrix} A & 2 \\ B & 1 \\ \cancel{C} & \cancel{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cancel{A} & \cancel{2} \\ B & 1 \\ C & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 1 \\ \cancel{B} & \cancel{1} \\ C & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 1 \\ B & 3 \\ C & 2 \end{pmatrix}.$$

4pts (ii) 以下の選好を考える:

$A : 213$ $\quad 1 : ACB$
$B : 132$ $\quad 2 : CAB$
$C : 123$ $\quad 3 : ACB$

この選好にたいして，ゲール・シャプレイ アルゴリズムを適用することにより，男性最適な安定マッチングを見つけよ．途中経過も記述すること．

$$\begin{pmatrix} A & 2 \\ \cancel{B} & \cancel{1} \\ C & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 2 \\ B & 3 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

4pts (iii) 男性側がプロポーズするゲール・シャプレイ アルゴリズムを考える．真の選好が問 (ii) で与えられたものであるとする．女性 1 は戦略的操作 (偽の選好を報告することにより，自分にとってより好みの相手にマッチされようとすること) を考えているとする．いま，ほかの男女が真の選好を報告するとき，女性 1 はどういう偽の選好を報告すれば真の選好を報告した場合より好みの相手にマッチされるか？ 適当な偽の選好を挙げて，そのときに決まるマッチングを求めよ (途中経過は書かなくてよい)．もし (成功する) 戦略的操作が不可能ならば，「不可能」と答えよ．

1: ABC とすれば
問(i)より $\begin{pmatrix} A & 1 \\ B & 3 \\ C & 2 \end{pmatrix}$ が得られる．
[その結果，1 は C にかわってより好ましい A にマッチされる．]

問題 2 [6 点]. 選択肢 A, B, C にたいする 13 人のひとびとの選好が以下で与えられている:

6 人 : ABC
2 人 : BCA
5 人 : CAB

たとえば「6 人 : ABC」は 6 人が選択肢を A, B, C の順に好むという意味である．選択肢 A のボルダ・スコアは 17 点である．選択肢 B, C のボルダ・スコアを計算し，ボルダ・ランキング (CBA などの順序) を求めよ．

B Score

[A $\quad 6 \times 2 + 5 \times 1 = 17$]
B $\quad 6 \times 1 + 2 \times 2 = 10$
C $\quad 2 \times 1 + 5 \times 2 = 12$

The Borda ranking is ACB.

問題 3 [14 点]. 量 $a_0 = 400$ だけある分割可能な一種類の財を個人 A, B, C に配分したい．ただし，請求権 (要求権; claims) のリストは $c = (c_A, c_B, c_C) = (100, 200, 300)$ で与えられている．問 (ii), (iii) の解答は，$a = (a_A, a_B, a_C)$ の形で配分を表せばよい．

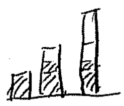
6pts (i) シャープレイ値 (random priority method) による配分を，以下の表を完成させることにより求めよ．(解答は 500/6 といった過分数でよい．)

	Amount Received		
Ordering	A	B	C
ABC	100	200	100
ACB	100	0	300
BAC	100	200	100
BCA	0	200	200
CAB	100	0	300
CBA	0	100	300
Total	400	700	1300
Shapley Allocation	400/6	700/6	1300/6

[2400]

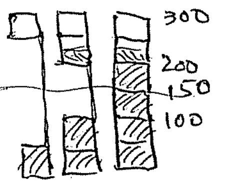
3 (ii) Maimonides' rule (Uniform Gains method; 下タンク方式) による配分を求めよ．説明は不要．

$a = (100, 150, 150)$



5 (iii) 拡張 CG ルール (the contested garment rule を整合的に拡張したもの; 上下タンク方式) による配分を求めよ．説明は不要．

$a = (50, 125, 225)$



学籍番号 ____________________

問題 4 [10 点]. ある駅から A, B, C の 3 人が自宅までタクシーを相乗りするときの費用分担の問題を，協力ゲームのモデルで考える．(各提携の Stand-alone cost を 100 円単位で表す) 費用関数を $c(\cdot)$ とすると，
$c(A) = 14$, $c(B) = 20$, $c(C) = 16$,
$c(A, B) = 22$, $c(A, C) = 24$, $c(B, C) = 30$,
$c(A, B, C) = 38$ となる．

6pts (i) このゲームのシャープレイ値による費用配分を，以下の表を完成させることにより求めよ．

	Amount Received		
Ordering	A	B	C
ABC	14	8	16
ACB	14	~~10~~ 14	~~14~~ 10
BAC	2	20	16
BCA	8	20	10
CAB	8	14	16
CBA	8	14	16
Total	54	90	84
Shapley Allocation	9	15	14 [38]

4pts (ii) 問 (i) で得られた配分 $a = (a_A, a_B, a_C)$ は，ある提携が受け入れない (提携合理性を満たさない) ためコアに入らないという．その配分を受け入れない提携をひとつ挙げよ (ひとつしかない). 受け入れない理由をしめす式も書くこと．

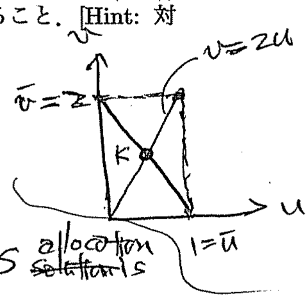
$c(AB) = 22 < 9 + 15 = a_A + a_B$
により，提携 $\{A, B\}$ が受け入れない．

$\left[\begin{array}{l} c(AC) = 24 > 23 \\ c(BC) = 30 > 29 \text{ etc.} \end{array}\right]$

問題 5 [13 点]. 要求者 1, 2 の効用をそれぞれ u, v とするとき，交渉集合 (bargaining set; 可能な効用の組合せ) の境界線が $2u + v = 2$ で与えられ，交渉がまとまらなかったときの「妥結点」が $(u, v) = (0, 0)$ で与えられているとする. [「妥結点」はテキストと同様の仮定.]

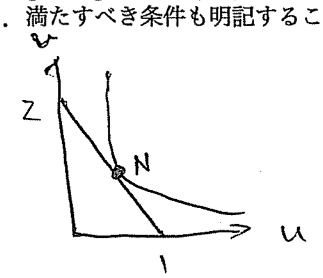
6pts (ii) Kalai-Smorodinsky 解 ~~による配分~~ (ある条件を満たす組 (u, v)) を求めよ．満たすべき条件式も明記すること．[Hint: 対角線]

$\left[\begin{array}{l} \text{For some } r, \\ u = r\bar{u} \\ v = r\bar{v}. \\ \text{So, } v = \frac{\bar{v}}{\bar{u}} u = 2u \end{array}\right]$



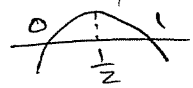
From $v = 2u$
and $2u + v = 2$, the KS ~~solution~~ allocation is
$(u, v) = (\frac{1}{2}, 1)$.

7pts (ii) ナッシュ解 ~~による配分~~ (Nash bargaining solution; ある条件を満たす組 (u, v)) を求めよ．満たすべき条件も明記すること．[Hint: 積]



Maximize uv
subject to $2u + v = 2$.

$\Rightarrow$ Maximize $u(2-2u) = 2u(1-u)$



$\left[\begin{array}{l} = -2u^2 + 2u \\ = -2(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \end{array}\right]$

Then $u = \frac{1}{2}$.
The Nash ~~solution~~ allocation is
$(u, v) = (\frac{1}{2}, 1)$.

学籍番号 ______________________

問題 6 [18 点]. 10 単位ある財 X を
個人 1 に x 単位，個人 2 に $x' = 10 - x$ 単位
20 単位ある財 Y を
個人 1 に y 単位，個人 2 に $y' = 20 - y$ 単位
配分する (ただし $0 \leq x \leq 10$ かつ $0 \leq y \leq 20$).
個人 1 の効用が $u = u(x, y) = x + y$ で，個人 2 の効用が $v = v(x', y') = 2x' + y' = 2(10 - x) + (20 - y) = 40 - 2x - y = \hat{v}(x, y)$ で与えられている.

6pts (i) 財全体 $a_0 = (10, 20)$ のうち個人 1 が $s_1 = 4/5$，個人 2 が $s_2 = 1/5$ のシェアを受け取る権利があるとする. Equitarian allocation $((x, y), (x', y'))$ において，効用 u, v のみたすべき条件を方程式で表し，その条件のもとで効用比 u/v を求めよ. [Hint: 効用比は整数になる. x, y, x', y' を求める必要はない.]

$$u = u(x, y) = u\left(\frac{4}{5} r a_0\right) = \frac{4}{5} r (10 + 20) = 24r$$

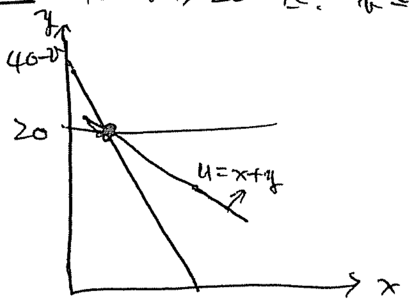
$$v = v(x', y') = v\left(\frac{1}{5} r a_0\right) = \frac{1}{5} r (2 \cdot 10 + 20) = 8r$$

$$\frac{u}{v} = \frac{24r}{8r} = 3.$$

12pts (ii) 効用フロンティア (bargaining set の境界線) の式を求めよ (u を v の関数で表せばよい. v の値で場合分けすることになる). 導出過程も記述すること. [Hint: 効用 $v = \hat{v}(x, y)$ の値をたとえば $\bar{v}$ にいったん固定しておいて効用 u を最大化すれば，ひとつの効率なペア $(u, \bar{v})$ が求まる. あとは $\bar{v}$ が自由に変えられることを表すため，v と書き直すといい. x-y 座標で考え，y 切片の値に応じて場合分けをする必要がある. $0 \leq y \leq 20$ に注意.]

Max $u = x + y$
subject to $v = 40 - 2x - y$,
(i.e. $y = -2x + 40 - v$)
$0 \leq x \leq 10$,
and $0 \leq y \leq 20$.

Case $40 - v \geq 20$ i.e. $v \leq 20$

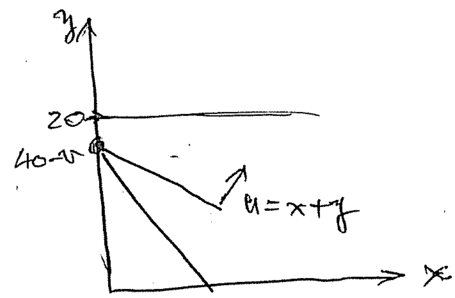


$$y = 20 = -2x + 40 - v$$

$$x = 10 - \frac{v}{2}$$

$$u = x + y = 10 - \frac{v}{2} + 20 = 30 - \frac{v}{2}$$

Case $40 - v \leq 20$ i.e. $v \geq 20$



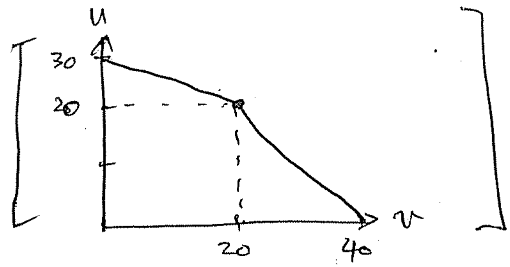
$$x = 0$$

$$y = 40 - v$$

$$u = x + y = 40 - v$$

Therefore,

$$u = \begin{cases} 30 - \frac{v}{2} & \text{if } v \leq 20 \\ 40 - v & \text{if } v \geq 20 \end{cases}$$

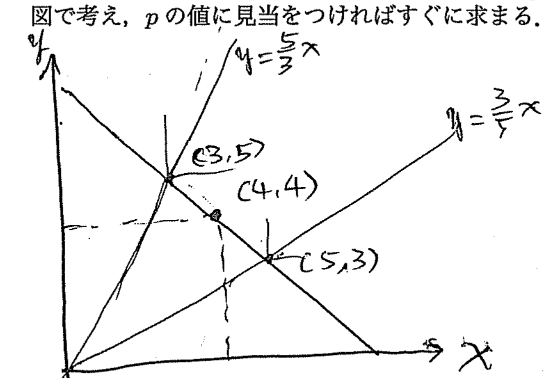


問題 7 [10 点]．バンドル $a_0 = (8, 8)$ を二人で分ける．各人 $i \in \{A, B\}$ の X 財の消費量を x_i，Y 財の消費量を y_i，初期保有を $a_0/2 = (\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (4, 4)$ とする．また，効用を $u_A(x_A, y_A) = \min\{\frac{3}{5}x_A, y_A\}$，$u_B(x_B, y_B) = \min\{\frac{5}{3}x_B, y_B\}$ とする．ただし $\min\{a, b\}$ は a, b のうちの最小値を表す．

4点 (i) X 財の価格を p，Y 財の価格を 1 とするとき，各人 i の (共通な) 予算制約線を式で表せ．

$$p x_i + 1 y_i = 4p + 4$$

6点 (ii) 競争均衡価格比 p と競争均衡配分 $((x_A, y_A), (x_B, y_B))$ を求めよ．[Hint: x_A と x_B をそれぞれ p の式で表した上である条件に代入して求めてもよいが，そこから p の値を導くのは面倒．x-y 座標の図で考え，p の値に見当をつければすぐに求まる．]



If we set $p = 1$,
then $(x_A, y_A) = (5, 3)$
$(x_B, y_B) = (3, 5)$,
and the market clears
$(x_A + x_B = 8,\ y_A + y_B = 8)$. — So these give a competitive equilibrium.

Alternatively,

$$\begin{cases} p x_A + y_A = 4p + 4 \\ y_A = \frac{3}{5} x_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_A = \frac{20(p+1)}{5p+3}$$

$$\begin{cases} p x_B + y_B = 4p + 4 \\ y_B = \frac{5}{3} x_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_B = \frac{12(p+1)}{3p+5}$$

~~From these, we got~~
Substituting these into
$x_A + x_B = 8$,
we got $p = 1$ etc.