共通科目 数学 (グラフ理論とネットワーク最適化) 期末試験
問題冊子・解答用紙 4 枚目中 1 枚目
香川大学 経済学部夜間主 2005 年度 前期前半
担当：三原麗珠

学籍番号 ______________________

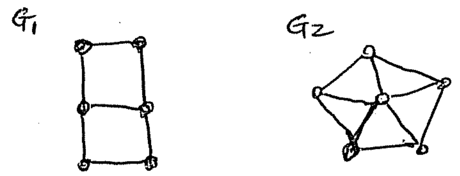
受験者名 ______________________

注意
a. 解答はこの用紙に直接記入して，提出すること．
b. 配点はそれぞれの問題のところにしめしている．合計 60 点満点である．

問題 1 [6 点]. 以下の真理値表を完成させよ．$\neg((\neg p)\vee q)$ の例にならって，各演算記号 $\neg, \wedge, \Rightarrow$ の下に対応する値を記入し，それぞれの命題式の (最終的な) 真偽の組み合わせを長丸で囲め:

p	q	$\neg((\neg p)\vee q)$	$\neg(p\wedge(\neg q))$	$(\neg q)\Rightarrow(\neg p)$
0	0	0 1 1 0		
0	1	0 1 1 1		
1	0	1 0 0 0		
1	1	0 0 1 1		

問題 2 [2+8=10 点]. 以下のグラフ G_1, G_2 を考える．



(i) 彩色数 $\chi(G_1), \chi(G_2)$ を求め，上のグラフをその彩色数で彩色せよ (グラフの各点に色番号を付けよ)．
$\chi(G_1) =$
$\chi(G_2) =$

(ii) 一般に，単純無向グラフ G の点集合 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が $\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \ldots \geq \deg v_n$ をみたすとき ($\deg v_i$ は点 v_i の次数，すなわち接続している辺の数)，彩色数 $\chi(G)$ はたかだか

$$u(G) = \max_{1\leq i\leq n}[\min\{i, \deg v_i + 1\}]$$

である．上界 $u(G_1), u(G_2)$ を以下のような表を用いて求めたい．(どの点が $v_1, \ldots, v_n$ に当たるのかは言わなくてよい．)

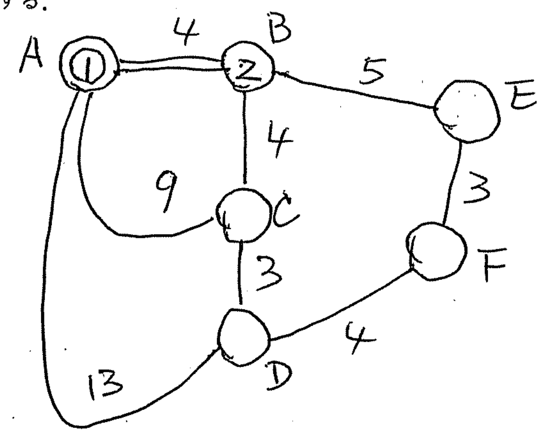
グラフ G_1 については以下の表より，
$u(G_1) =$

i	1	2	3	4	5	6
$\deg v_i + 1$						
$\min\{i, \deg v_i + 1\}$						

グラフ G_2 については以下の表より，
$u(G_2) =$

i	1	2	3	4	5	6
$\deg v_i + 1$						
$\min\{i, \deg v_i + 1\}$						

問題 3 [6+4=10 点]. 以下のネットワーク $[G, s, d]$ (ただし $G = (V, E)$) を考える．ただし，各辺 (u, v) に与えられた数字はその辺の辺長 $d(u, v)$ である．始点を $s = A$ とする．



ダイクストラ法 (アルゴリズム DIJKSTRA; テキストの 146–147 頁のコピーを添付) によって最短路木を求めたい．このアルゴリズムは各点 v にたいして $d^*(v)$ を求めるが，これは $s = A$ から v への最短路の候補の長さになっている．

(i) 以下の表はステップごとに u, $d^*(A), \ldots, d^*(F)$, $v_{\min}$ を記録したものである．以下の表を完成させよ．(すでに u として選ばれた点に対応する空欄は − で埋め，各ステップで u に隣接していない点に対応する値は括弧内に入れよ．)

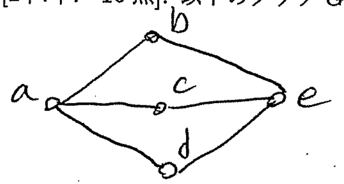
u	$d^*(A)$	$d^*(B)$	$d^*(C)$	$d^*(D)$	$d^*(E)$	$d^*(F)$	$v_{\min}$
A	0	∞	∞	∞	∞	∞	−
A	−	4	9	13	(∞)	(∞)	B
B	−	−	8	(13)			
	−	−					
	−	−					
	−	−					

(ii) 以下を上図に施すことによって，最短路木を完成させよ: (a) 図の各点をしめす円内に，その点が (アルゴリズムのステップ 2(ii) で; すなわち上の表で) u として選ばれた順番を記入せよ; (b) 最短路をしめす辺を二重線で表記せよ.

共通科目 数学 (グラフ理論とネットワーク最適化) 期末試験
問題冊子・解答用紙 4 枚目中 2 枚目
香川大学 経済学部夜間主 2005 年度 前期前半
担当：三原麗珠

学籍番号 ____________________

問題 4 [2+?+?=10 点]. 以下のグラフ G を考える.



(i) このグラフ G が 2 部グラフ (V_1, V_2, E) であることをしめしたい. 要素を具体的に列挙することにより, 点集合 V_1, V_2 を記述せよ (正解は一通りではないが, 混乱を避けるため一通りの答だけ書くこと).

$V_1 =$

$V_2 =$

(ii) ハミルトン閉路とはすべての点 (始点=終点以外) を一度づつ通ってもとに戻る閉路である. 問題 2 のグラフ G_1 はハミルトン閉路を持つか. 持つならばそれをここに図示せよ. 持たないならばその理由を述べよ.

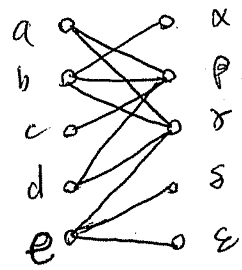
(iii) 上のグラフ G はハミルトン閉路を持つか. 持つならばそれを図示せよ. 持たないならばその理由を述べよ.

問題 5 [2+2+6=10 点]. 2 部グラフ $G = (V_1, V_2, E)$ において $|V_1| \le |V_2|$ を仮定する. 任意の $U \subseteq V_1$ にたいして, $N(U)$ を U の点から接続する V_2 の点の集合

$$N(U) = \{v \in V_2 : \text{ある } u \in U \text{ について } (u, v) \in E\}$$

とする.

(i) いま 2 部グラフ G が以下の図で与えられているとする. ただし $V_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $V_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ である.



$U = \{d, e\}$ としたとき, 要素を列挙することにより $N(U)$ を記述せよ.

$N(U) =$

(ii) 結婚定理は $|M| = |V_1|$ をみたすようなマッチング M が存在するための必要十分条件を与える. その必要十分条件を以下から選べ (正しい選択肢のラベルを丸で囲め):

a. 任意の $U \subseteq V_1$ にたいし, $|U| > |N(U)|$.
b. 任意の $U \subseteq V_1$ にたいし, $|U| \ge |N(U)|$.
c. 任意の $U \subseteq V_1$ にたいし, $|U| < |N(U)|$.
d. 任意の $U \subseteq V_1$ にたいし, $|U| \le |N(U)|$.

(iii) 設問 (i) の 2 部グラフ G は, $|M| = |V_1| = 5$ をみたすようなマッチング M を持つか. 理由を示して答えよ.

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 6 [6+4+4=14 点]. 点 s を始点とし点 t を終点とする有向ネットワーク $N=[(V,E);s,t,u]$ の最大フローをアルゴリズム MAX_FLOW で求めたい.

(i) 下の図は，あるフローが与えられたとき MAX_FLOW に従って残余ネットワークとフロー追加路を求め，フローを一度修正したところである.

ただし左側の図の各辺 e に $x(e)/u(e)$ の形で与えられたラベルは，その辺上のフロー $x(e)$ とその辺の容量 $u(e)$ を斜線で区切ったものである．f はフロー値 (始点 s からの流出量) である.

右側の図はそのすぐ左の図のフロー x に対応する残余ネットワーク $\tilde{N}_x$ であり，フロー追加路が存在する場合はそのうち一本が波線で示されている．Δ はフロー追加路沿いの辺のうち残余ネットワーク上で最小容量をもつものの容量である.

この図の続きを描いて完成させよ．フロー値 f やフロー追加路や Δ を明示すること．(MAX_FLOW を最後まできちんと実行すること．すなわち残余ネットワークにフロー追加路が存在しなくなるまで続けよ．)

(ii) ネットワーク N の s-t カットとは，点集合 V の分割 (S,T) (つまり $T=V-S$) で $s\in S, t\in T$ をみたすものである．その容量は

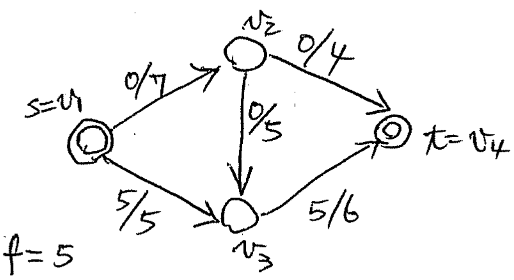
$$u(S,T)=\sum\{u(e)|e=(v,w)\in E, v\in S, w\in T\}$$

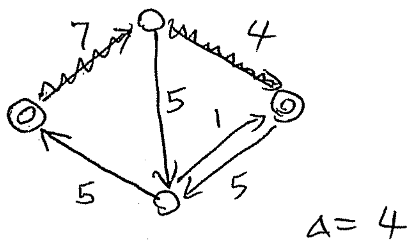
で与えられる.

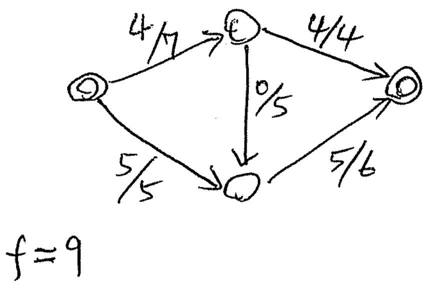
容量が最小となる s-t カットは何になるか．集合 S の要素を列挙することによりしめせ．また，その容量 $u(S,T)$ はいくらになるか.

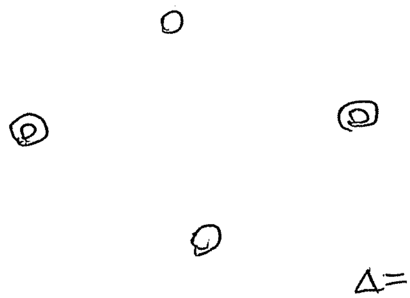
$S=$

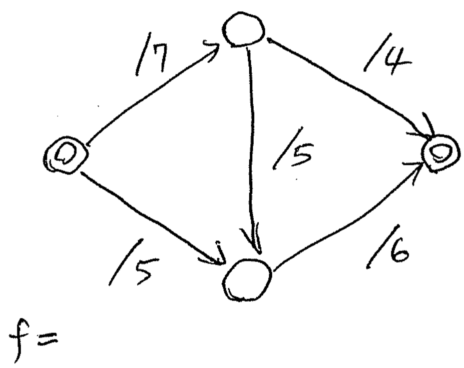
$u(S,T)=$

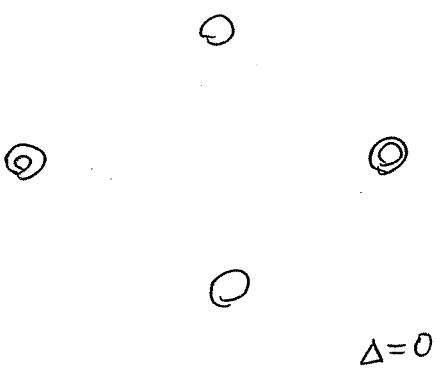








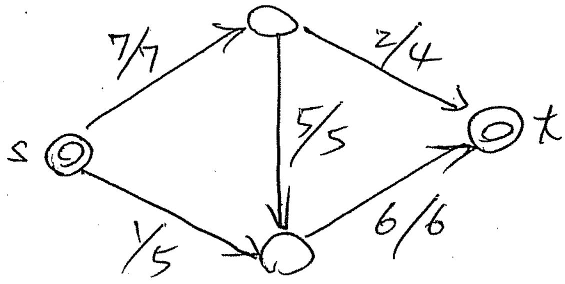




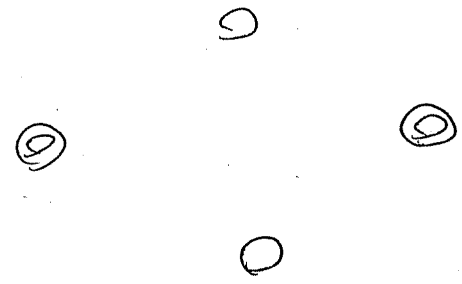
共通科目 数学 (グラフ理論とネットワーク最適化) 期末試験
問題冊子・解答用紙 4 枚目中 4 枚目
香川大学 経済学部夜間主 2005 年度 前期前半
担当：三原麗珠

学籍番号 ______________________

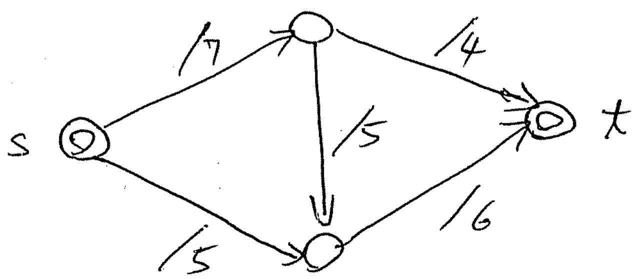
(iii) 以下の図のフローが与えられたとき，MAX_FLOW に従って残余ネットワークとフロー追加路を求め，フローを修正せよ．MAX_FLOW を最後まで実行する必要はない．



$f=8$



$\Delta=$



$f=$