応用科目 資源配分の公平 期末試験
問題冊子・解答用紙 3 枚目中 1 枚目
香川大学大学院地域マネジメント研究科 2006 年度 後期前半
担当：三原麗珠

学籍番号 ________________

受験者名 正解例

注意
a. 解答はこの用紙に直接記入して，提出すること．
b. 配点はそれぞれの問題のところにしめしている．合計 100 点満点である．

問題 1 [4 点]. $A = \{0, 1\}$, $B = \{x, y\}$ とする．

2pts (i) 直積 $A \times B$ を求めよ．
$A \times B =$ $\{(0,x), (0,y), (1,x), (1,y)\}$.

2pts (ii) べき集合 2^A を求めよ．
$2^A =$ $\{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

減点 7点 問題 2 [6 点]. 写像 $f: A \to B$ と $g: B \to C$ を全射 (上への写像) とする．合成写像 $g \circ f: A \to C$ を $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ で定義する．このとき，$g \circ f$ が全射であることを証明したい．以下の空欄を埋めて証明を完成せよ．

「任意の $c \in C$ にたいして，ある $a \in A$ が存在して，$(g \circ f)(a) = c$ となる」ことをしめせばよい．

-3 いま $c \in C$ とする．g が全射であることから，ある $b \in B$ が存在して，$g(b) = c$ となる．一方，f が

-3 全射であることから，ある $a \in A$ が存在して，$f(a) = b$ となる．

-1 以上により，任意の $c \in C$ にたいして，$(g \circ f)(a) = g(f(a)) =$ $g(b)$ $= c$ となるような $a \in A$ が存在することがいえた．

ヒント．空欄には以下のいずれかが入る：f, g, $f(a)$, $g(b)$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

問題 3 [6 点]. 以下の真理値表を完成せよ．$\neg((\neg p) \vee q)$ の例にならって，各演算記号 $\neg$, $\wedge$, $\Rightarrow$ の下に対応する値を記入し，それぞれの命題式の (最終的な) 真偽の組み合わせを長丸で囲め：

3+3

p	q	$\neg((\neg p) \vee q)$	$\neg(p \wedge (\neg q))$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
0	0	0 1 1 0	1 0 0 1	1 1 1
0	1	0 1 1 1	1 0 0 0	0 1 1
1	0	1 0 0 0	0 1 1 1	1 0 0
1	1	0 0 1 1	1 1 0 0	0 1 0

問題 4 [14 点]. 選択肢 A, B, C にたいする 13 人のひとびとの選好が以下で与えられている：

6 人 : ABC
2 人 : BCA
5 人 : CAB

たとえば「6 人 : ABC」は 6 人が選択肢を A, B, C の順に好むという意味である．

(i) 選択肢 A のボルダ・スコアは 17 点である．選択肢 B, C のボルダ・スコアを計算し，ボルダ・ランキング (CBA などの順序) を求めよ．

	Borda Score
A	12+5 = 17
B	6+4 = ~~18~~ 10
C	2+10 = 12

4
4
2 Borda Ranking : ~~BAC~~ . ACB.

(ii) ランキング ABC のコンドルセ・スコアは $v_{AB} + v_{BC} + v_{AC} = 11 + 8 + 6 = 25$ 点である．ランキング CBA のコンドルセ・スコアを計算せよ．

Condorcet score of CBA
$= v_{CB} + v_{BA} + v_{CA}$
4 $= 5 + 2 + 7 = 14$ points

問題 5 [16 点]. $\mathbf{N}$ を要求者の集合とする．配分基準 F がペア整合的である (pairwise consistent) とは，任意の有限 (要求者) 集合 $I \subseteq \mathbf{N}$, I 上の任意の問題 (τ, a_0), そして任意の 2 人の (要求者) 集合 $\{i, j\} \subseteq I$ について，以下の 2 条件が成り立つことである：

(1) If $a \in F(\tau, a_0)$, then $(a_i, a_j) \in F((\tau_i, \tau_j), a_i + a_j)$

(2) If $a \in F(\tau, a_0)$ and $(b_i, b_j) \in F((\tau_i, \tau_j), a_i + a_j)$, then $c \in F(\tau, a_0)$, ただし c は以下で定義される配分：$c_i = b_i$, $c_j = b_j$, その他の $k \in I \setminus \{i, j\}$ については $c_k = a_k$.

いま

$$F((\tau_1, \tau_2, \tau_3), 2) = \{(0, 1, 1)\}$$

とする．後述の (i), (ii) の主張が正しくなるように空欄を以下のいずれかで埋めよ：(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), である，ではない．

(i) ~~条件 (1) から以下がいえる~~：

3 $(0,1)$ $\in F((\tau_1, \tau_2), 1)$

3 $(0,1)$ $\in F((\tau_1, \tau_3), 1)$

3 $(1,1)$ $\in F((\tau_2, \tau_3), 2)$.

(ii) いま $(1, 0) \in F((\tau_1, \tau_3), 1)$ とする (τ のサブスクリプトに注意)．~~このとき条件 (2) から~~，

4 $(1,1,0)$ $\in F((\tau_1, \tau_2, \tau_3), 2)$

3 がいえる．したがって F はペア整合的 ではない

学籍番号 正解例

問題 6 [20 点]. 量 $a_0 = 400$ だけある分割可能な一種類の財を個人 A, B, C に配分したい．ただし，請求権 (要求権; claims) のリストは $c = (c_A, c_B, c_C) = (100, 200, 300)$ で与えられている．問 (ii), (iii) の解答は，$a = (a_A, a_B, a_C)$ の形で配分を表せばよい．

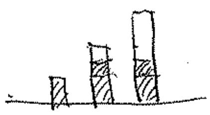
10 (i) シャープレイ値 (random priority method) による配分を，以下の表を完成させることにより求めよ．(解答は 500/6 といった過分数でよい．)

	Amount Received		
Ordering	A	B	C
ABC	100	200	100
ACB	100	0	300
BAC	100	200	100
BCA	0	200	200
CAB	100	0	300
CBA	0	100	300
Total	400	700	1300
Shapley Allocation	400/6	700/6	1300/6

[2400]

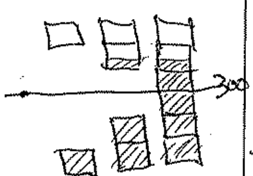
4 (ii) Maimonides' rule (Uniform Gains method; 下タンク方式) による配分を求めよ．説明は不要．

$a = (100, 150, 150)$.



6 (iii) 拡張 CG ルール (the contested garment rule を整合的に拡張したもの; 上下タンク方式) による配分を求めよ．説明は不要．

$a = (50, 125, 225)$.



問題 7 [14 点]. 状況の集合 $X^o = \{(c, a) : 0 \le a < c\}$ 上の比較基準 P を以下で定義する:

$$(c, a)P^+(c', a') \iff a < a'.$$

ただし P^+ は P の strict part である (言い換えれば，P が「以上に優先する」を表すなら P^+ は「よりも優先する」を表すということ)．すなわち (c の値にかかわらず) a の値が小さいペア (c, a) ほど優先される．

いま，ある要求問題 $((c_1, c_2), a_0)$ の比例配分 (a_1, a_2) が $(c_2, a_2)P^+(c_1, a_1)$ を満たす (したがって $(c_2, a_2)P(c_1, a_1)$ も満たす) とする．

8 (i) そのような要求問題の例を挙げ，上記の優先順位を満たすことをしめせ．[たとえば「$((c_1, c_2), a_0) = ((4, 4), 2)$」などと答えた上で配分を求め上記の優先順位を確認すればよい．ただしこの例では $(a_1, a_2) = (1, 1)$ となる．したがって $(c_2, a_2) = (4, 1)$ と $(c_1, a_1) = (4, 1)$ が等しくなるため，前者が後者に優先するとはいえない．]

$a_1 < c_1$, $a_2 < c_2$, $a_2 < a_1$ となる例なら可

たとえば
$((c_1, c_2), a_0) = ((4, 2), 3)$ とすれば
$(a_1, a_2) = (2, 1)$.
よって $a_2 < a_1$ となるため
$(c_2, a_2) P^+ (c_1, a_1)$ をみたす．

3 (ii) $(c_2, a_2)P(c_1, a_1)$ がみたされるとき，「要求者 1 から要求者 2 へ $\epsilon > 0$ の移転が正当化できる」とは (c_2, a_2)P^+($c_1, a_1 - \varepsilon$) となることである．括弧内を適切に埋めよ．

3 (iii) 要求者 1 から要求者 2 へ $\epsilon > 0$ の移転が正当化できるためには，ϵ はどのような条件を満たさなければならないか．$\epsilon > 0$ がみたすべき不等式をしめせ．

$a_2 < a_1 - \varepsilon$.

学籍番号 正解例

問題 8 [16 点]. ある駅から A, B, C の 3 人が自宅までタクシーを相乗りするときの費用分担の問題を，協力ゲームのモデルで考える．(各提携の Stand-alone cost を 100 円単位で表す) 費用関数を $c(\cdot)$ とすると，
$c(A) = 14$, $c(B) = 20$, $c(C) = 16$,
$c(A, B) = 22$, $c(A, C) = 24$, $c(B, C) = 30$,
$c(A, B, C) = 38$ となる．

10 (i) このゲームのシャープレイ値による費用配分を，以下の表を完成させることにより求めよ．

	Amount Received		
Ordering	A	B	C
ABC	14	8	16
ACB	14	14	10
BAC	2	20	16
BCA	8	20	10
CAB	8	14	16
CBA	8	14	16
Total	54	90	84
Shapley Allocation	9	15	14

[38]

6 (ii) 問 (i) で得られた配分 $a = (a_A, a_B, a_C)$ は，ある提携が受け入れない (提携合理性を満たさない) ためコアに入らないという．その配分を受け入れない提携をひとつ挙げよ (ひとつしかない)．受け入れない理由をしめす式も書くこと．

$c(A,B) = 22 < 9 + 15 = a_A + a_B$
より 提携 $\{A, B\}$ が受け入れない

[その他は
$c(A) = 14 > a_A, \cdots,$
$c(AC) = 24 > 9 + 14 = a_A + a_C$
$c(BC) = 30 > 15 + 14 = a_B + a_C$]

問題 9 [4 点]. 集合 $A = \{1, 2\}$ の直積 $A \times A \times A$ 上の辞書式順序 $\succ$ が $(2,2,2) \succ (1,1,1)$ と $(2,1,1) \succ (1,2,1)$ を満たすとする．この直積に属するすべての要素 (ベクトル) 8 個を，順序 $\succ$ の大きいものから順にすべて列挙せよ．[以下の続きを記入すること．]

$(2,2,2) \succ (2,2,1) \succ (2,1,2) \succ (2,1,1)$
$\succ (1,2,2) \succ (1,2,1) \succ (1,1,2) \succ (1,1,1)$