香川大学大学院地域マネジメント研究科 2006 年度 後期
担当：三原麗珠

学籍番号 ____________

受験者名 正解例

注意
a. 解答はこの用紙に直接記入して，提出すること．
b. 配点はそれぞれの問題のところにしめしている．合計 100 点満点である．

問題 1 [25 点]. 男性の集合を $M = \{A, B, C\}$，女性の集合を $W = \{1, 2, 3\}$ とする．

(i) 以下の選好を考える (たとえば「$A : 213$」は男性 A が女性を 2, 1, 3 の順に好むという意味):

$$\begin{array}{ll} A : 213 & 1 : ACB \\ B : 132 & 2 : CAB \\ C : 123 & 3 : BAC \end{array}$$

いま，マッチング μ が以下で与えられるとする:

$$\mu = \begin{pmatrix} A & 1 \\ B & 2 \\ C & 3 \end{pmatrix}.$$

- ペア $(A, 2)$ は μ をブロックするか？

  Yes.

- ペア $(A, 3)$ は μ をブロックするか？

  No.

(ii) 問 (i) の選好にたいして，男性側がプロポーズするゲール・シャプレイ アルゴリズムを適用することにより，安定マッチングを見つけよ．途中経過も記述すること．[いちぶだけ行列で書いているので，空白を埋めて続きを書くこと．アルゴリズムが停止するまで続けて得られた行列を，解答のマッチングとしてよい．]

$$\begin{pmatrix} A & 2 \\ \cancel{B} & \cancel{1} \\ C & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 2 \\ B & 3 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) 以下の選好を考える:

$$\begin{array}{ll} A : 213 & 1 : ABC \\ B : 132 & 2 : CAB \\ C : 123 & 3 : BAC \end{array}$$

この選好にたいして，ゲール・シャプレイ アルゴリズムを適用することにより，男性最適な安定マッチングを見つけよ．途中経過も記述すること．

$$\begin{pmatrix} A & 2 \\ B & 1 \\ \cancel{C} & \cancel{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cancel{A} & \cancel{2} \\ B & 1 \\ C & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 1 \\ \cancel{B} & \cancel{1} \\ C & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 1 \\ B & 3 \\ C & 2 \end{pmatrix}.$$

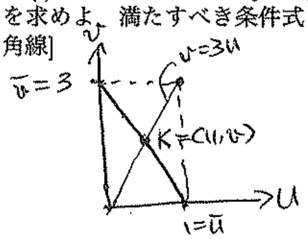
(iv) 男性側がプロポーズするゲール・シャプレイ アルゴリズムを考える．真の選好が問 (i) で与えられたものであるとする．女性 1 は戦略的操作 (偽の選好を報告することにより，自分にとってより好みの相手にマッチされようとすること) を考えているとする．いま，ほかの男女が真の選好を報告するとき，女性 1 はどういう偽の選好を報告すれば真の選好を報告した場合より好みの相手にマッチされるか？ 適当な偽の選好を挙げて，そのときに決まるマッチングを求めよ (途中経過は書かなくてよい)．もし (成功する) 戦略的操作が不可能ならば，「不可能」と答えよ．

$1 : ABC$, $\begin{pmatrix} A & 1 \\ B & 3 \\ C & 2 \end{pmatrix}$ from (iii).

[By reporting the preference above, 1 gets A instead of C.]

問題 2 [15 点]. 要求者 1, 2 の効用をそれぞれ u, v とするとき，交渉集合 (bargaining set; 可能な効用の組合せ) の境界線が $3u + v = 3$ で与えられ，交渉がまとまらなかったときの「妥結点」が $(u, v) = (0, 0)$ で与えられているとする．[「妥結点」はテキストと同様の仮定．]

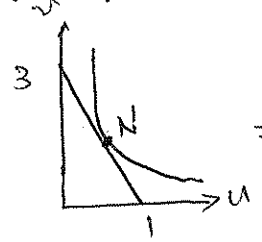
(i) Kalai-Smorodinsky 解 (ある条件を満たす組 (u, v)) を求めよ．満たすべき条件式も明記すること．[Hint: 対角線]



[For some r,
$u = r\bar{u}$
$v = r\bar{v}$
So, $v = \frac{\bar{v}}{\bar{u}} u = 3u$.]

From $v = 3u$ and $3u + v = 3$,
the K-S solution is
$(u, v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(ii) ナッシュ解 (Nash bargaining solution; ある条件を満たす組 (u, v)) を求めよ．満たすべき条件も明記すること．[Hint: 積]



[Maximize uv
subject to $3u + v = 3$

$\Rightarrow$ Maximize $u(3 - 3u)$
$= 3u(1 - u)$ (*)
[$= -3u^2 + 3u$
$= -3\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$]

0 $\frac{1}{2}$ 1

$u = \frac{1}{2}$ maximizes (*).
The Nash solution is
$(u, v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

学籍番号 ____________________

問題 3 [30 点]. 10 単位ある財 X を
個人 1 に x 単位，個人 2 に $x' = 10 - x$ 単位
20 単位ある財 Y を
個人 1 に y 単位，個人 2 に $y' = 20 - y$ 単位
配分する (ただし $0 \leq x \leq 10$ かつ $0 \leq y \leq 20$).
個人 1 の効用が $u = u(x, y) = x + 2y$ で，個人 2 の効用が $v = v(x', y') = 2x' + y' = 2(10 - x) + (20 - y) = 40 - 2x - y = \hat{v}(x, y)$ で与えられている．

(i) 財全体 $a_0 = (10, 20)$ のうち個人 1 が $s_1 = 4/5$，個人 2 が $s_2 = 1/5$ のシェアを受け取る権利があるとする．Equitarian allocation $((x, y), (x', y'))$ において，効用 u, v のみたすべき条件を方程式で表し，その条件のもとで効用比 u/v を求めよ．[Hint: 効用比は整数になる．x, y, x', y' を求める必要はない．]

There exists a real number r such that

$$u = u(x, y) = u\left(\tfrac{4}{5} r a_0\right) = \tfrac{4}{5} r (10 + 2 \times 20) = 40r$$

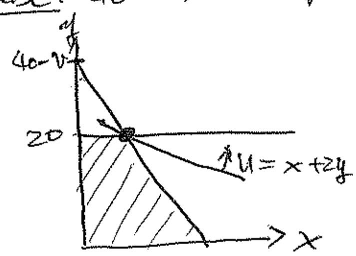
$$v = v(x', y') = v\left(\tfrac{1}{5} r a_0\right) = \tfrac{1}{5} r (2 \times 10 + 20) = 8r$$

$$\frac{u}{v} = \frac{40r}{8r} = 5.$$

(ii) 効用フロンティア (bargaining set の境界線) の式を求めよ (u を v の関数で表せばよい．v の値で場合分けすることになる)．導出過程も記述すること．[Hint: 効用 $v = \hat{v}(x, y)$ の値をたとえば $\bar{v}$ にいったん固定しておいて効用 u を最大化すれば，ひとつの効率なペア $(u, \bar{v})$ が求まる．あとは $\bar{v}$ が自由に変えられることを表すため，v と書き直すといい．x-y 座標で考え，y 切片の値に応じて場合分けをする必要がある．$0 \leq y \leq 20$ に注意．]

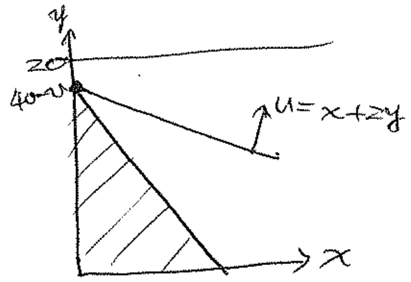
Max $u = x + 2y$ [i.e. $y = -\frac{x}{2} + \frac{u}{2}$]
subject to $v = 40 - 2x - y$,
(i.e., $y = -2x + 40 - v$)
$0 \leq x \leq 10$,
and $0 \leq y \leq 20$.

Case: $40 - v \geq 20$ i.e. $v \leq 20$.



$y = 20 = -2x + 40 - v$
$2x = 20 - v$
$x = 10 - \frac{v}{2}$
$u = x + 2y = 10 - \frac{v}{2} + 2 \times 20 = 50 - \frac{v}{2}$

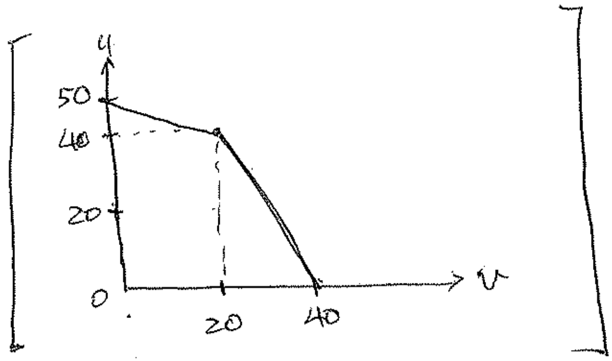
Case: $40 - v \leq 20$, i.e., $v \geq 20$.



$x = 0$
$y = 40 - v$
$u = x + 2y = 2(40 - v) = 80 - 2v$

Therefore,

$$u = \begin{cases} 50 - \frac{v}{2} & \text{if } v \leq 20 \\ 80 - 2v & \text{if } v \geq 20. \end{cases}$$



問題 4 [問題 5 と合わせて 30 点]. テキスト Chapter 8, Section 9 (page 143) の bidding to be divider のプロセスにおいて，どのような戦略 $s_A = (p_A, (a_A, b_A))$ を用いればプレーヤー A は少なくとも等分 $a_0/2$ を受け取ったとき以上の効用を (相手 B の戦略 $s_B = (p_B, (a_B, b_B))$ にかかわらず) 確保できるか．ただし a_0 は配分すべきすべての財 (page 138 で言えば $a_0 = (x, y) = (100, 200)$) を表し，プレーヤー $i \in \{A, B\}$ の戦略 $s_i = (p_i, (a_i, b_i))$ で p_i は Step 1 での "bid" ($0 \le p_i \le 1$) を，(a_i, b_i) は i が divider に選ばれたときの A, B への配分 (i が指定する A の portion が a_i で，i が指定する B の portion が b_i) を表す．(厳密にいえば戦略には相手の提案を拒否するかどうかをふくめる必要があるが，この段階ではもっとも高い利得を得られるように行動すると仮定し，戦略からは除外しておく．) また，$p_A = p_B$ のときは A が divider になると仮定する．[簡単だが，きちんと場合分けして説明せよ．]

Set $s_A = (p_A, (a_A, b_A)) = (\frac{1}{2}, (\frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2}))$.

Suppose $p_A \geq p_B$:

Then A becomes divider.

Since $b_A = \frac{1}{2}a_0 = p_A a_0 \geq p_B a_0$,

B accepts b_A

(since by rejecting b_A, B can only get $p_B a_0$).

Therefore, A gets $\frac{a_0}{2}$.

Suppose $p_A < p_B$:

Then B becomes divider.

Since A can reject B's offer,

A can get $p_A a_0 = \frac{1}{2} a_0$ at worst.

問題 5 [問題 4 と合わせて 30 点]. n 人の消費者からなる経済
consumers

$$((u_1, \frac{a_0}{n}), \ldots, (u_n, \frac{a_0}{n}))$$

を考える．ただし消費者 i の効用関数 $u_i(\cdot)$ は単調 (財の多いほど好む) とする．各消費者の初期保有は $\frac{a_0}{n}$ で与えられており，これは全体のバンドル a_0 を等分していることを意味する．
monotonic

いま，ある配分 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ が効率で egalitarian であるとする．
efficient

(i) 「配分 a が egalitarian である」とはどういうことか？ 「すべての〜について (For all)」「ある〜が存在し (there exists)」などの言葉の順序に注意して定義せよ．

配分 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ が egalitarian であるとは，

there exists a real number $r > 0$
such that for all consumers i,
$u_i(a_i) = u_i(r a_0)$. (*)

(ii) 配分 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ について，以下が成り立つことをしめせ:
すべての消費者 j について，$u_j(a_j) \geq u_j(\frac{a_0}{n})$.

Suppose there exists j such that

$u_j(a_j) < u_j(\frac{a_0}{n})$. (1)

We derive a contradiction.

Since a is egalitarian, (*) holds.

Thus, $u_j(a_j) = u_j(r a_0)$.

By (1),

$u_j(r a_0) < u_j(\frac{a_0}{n})$.

By the monotonicity of u_j, we have

$r < \frac{1}{n}$.

Then, by (*) and monotonicity,

$u_i(a_i) = u_i(r a_0) < u_i(\frac{1}{n} a_0)$ for all i. (2)

Since $(\frac{1}{n}a_0, \ldots, \frac{1}{n}a_0)$ is an allocation,

(2) implies that

$a = (a_1, \ldots, a_n)$ is not efficient

(since all consumers i prefer $\frac{1}{n}a_0$ to a_i).

This is a contradiction.

Figure: $n=2$, $m=2$ (commodities)