権利論への数理的アプローチ期末試験 問題冊子／解答用紙 **学籍番号** ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
香川大学 教養教育主題科目 人間生活と環境: くらしと経済
1999 年度 前期
担当：H. Reiju Mihara

注意
a**．解答はこの用紙に直接記入して，提出すること．**
b**．すべてのページの上部下線上に氏名を記入すること．**

配点はそれぞれの問題のところに表示している．合計 100 点満点である．
選択式の問題では正しい選択肢に対応するラベル (カタカナ記号) を〇で囲め．ラベルの無いばあいは，選択肢自体を〇で囲め．(訂正する場合はもとの〇をきれいに消すか，もとの〇に重ねて×をつけたうえで，新しいラベルまたは選択肢に〇をつけよ．) 選択式でない問題 (穴埋め問題など) については，下線上あるいは空欄に答を記入せよ．
フレームワークや用語の定義，そして記号の意味や前提のすべてが問題の中で与えられているわけではない．講義や文献で与えた知識を前提として答えよ．**鍵になる前提知識をどうしても思い出せないときは質問すること．**

1. [7 点] 以下のゲームを考える．

		Player 2		
		s_2	t_2	u_2
Player 1	s_1	$1, -1$	$1, -1$	$1, 1$
	t_1	$100, 0$	$0, 100$	$-1, 1$
	u_1	$0, 100$	$100, 0$	$-1, 1$

Player 2 の戦略 t_2 にたいする Player 1 の最適反応は〈s_1，t_1，u_1〉(1 つ選べ) である．Player 1 の戦略 t_1 にたいする Player 2 の最適反応は〈s_2，t_2，u_2〉(1 つ選べ) である．このゲームの (純粋戦略による) ナッシュ均衡は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿である．(たとえば「(s_1, s_2), (s_1, t_2)」のように，ナッシュ均衡をすべて挙げること．) Player 1 の支配戦略をすべてあげよ (存在しないときは「なし」と答えること): ＿＿＿＿＿＿＿＿．[1 点，1 点，3 点，2 点]

2. [8 点] つぎの命題 1，2 について，(i) その真・偽と (ii) それが真または偽であることの理由としてもっとも妥当なものとの組み合わせを選べ．ただし $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする．[4 点，4 点]
命題 1: $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists y \in \mathbf{N}\ [y > x]$.
ア．真; $x = 1$ とすればよい．
イ．真; 与えられた x にたいして，$y = x + 100$ とすればよい．
ウ．偽; 与えられた x にたいして，$y = x$ とすればよい．
エ．偽; 与えられた x にたいして，$y = 1$ とすればよい．
命題 2: $\exists y \in \mathbf{N}\ \forall x \in \mathbf{N}\ [y > x]$.
カ．真; 「$\forall x \in \mathbf{N}\ [y > x]$」となる y が存在するとして，$x = y - 1$ とすればよい．
キ．真; 与えられた x にたいして，$y = x + 100$ とすればよい．
ク．偽;「$\forall x \in \mathbf{N}\ [y > x]$」となる y が存在するとして，$x = y + 1$ とすれば矛盾が導ける．
ケ．偽; $y = 1$ とすれば「$\forall x \in \mathbf{N}\ [y > x]$」とならないので．

ヒント．$\forall$ は「すべての」，$\exists$ は「少なくとも 1 つの」あるいは「存在する」という意味にほぼ対応した記号．命題 Q と R が与えられたとき，命題 $Q \to R$ は「もし Q ならば R である」という条件文.（関数を表す記号と混同しないように.）記号の現れる順番には注意を要する．たとえば，I を個人の集合とするとき，

$$\forall i \in I\ \exists j \in I\ [j \text{ は } i \text{ を舐める}]$$

という文は「すべての個人 i にたいし，個人 j が存在して，j は i を舐める」，つまり「誰もが誰かに舐められる」という意味．一方，

$$\exists j \in I\ \forall i \in I\ [j \text{ は } i \text{ を舐める}]$$

という文は「ある個人 j が存在して，すべての個人 i にたいし，j は i を舐める」，つまり「みんなを舐める人がいる」という意味.

3. [15 点] 個人 1 を「独裁者」とする社会厚生関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ を考える．すなわち，すべての選好プロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ にたいして，$R_0 = f(R) = R_1$ となっている．ただし個人は 3 人以上いる ($n \geq 3$) とする．
a. f はパレート条件をみたすか?:〈みたす，みたさない〉 [3 点]

以下にその証明を与えよ [5 点]:

b. f は Minimal Liberty をみたすか?:〈みたす，みたさない〉 [3 点]

c. 社会厚生関数が与えられたとき,「**個人 i が天気である**」とは以下で定義される:

$$\exists(x,y) \in X^2\ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$$
$$[(x \neq y)\ \&\ (xP_iy \to xP_0y)\ \&\ (yP_ix \to yP_0x)].$$

f について正しいものを選べ [4 点]:
キ．だれも天気でない．
ド．個人 1 だけが天気である．
ク．個人 1 をふくむ 2 人だけが天気である．
サ．個人 1 をふくまない 2 人だけが天気である．
イ．全員が天気である．

4. [5 点] 社会厚生関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が「条件 JJ」をみたすとは:

$$\forall i \in I\ \exists(x,y) \in X^2\ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$$
$$[(x \neq y)\ \&\ (xP_iy \to xP_0y)\ \&\ (yP_ix \to yP_0x)].$$

条件 JJ の解釈としてもっとも自然なものを，以下から選べ．
セ．すべての個人が選択肢 x を選択肢 y より好めば，社会は x を y より高くランクし，すべての個人が y を x より好めば，社会は y を x より高くランクする．
ン.「少なくとも一組の選択肢のペアについて，それらに対する自己の選好順序を社会的ランク付けに反映させることができるような個人」が，少なくとも 2 人存在する．
タ．すべての個人は，あらゆる選択肢のペアについて，それらに対する自己の選好順序を社会的ランク付けに反映させることができる．
ク．すべての個人は，少なくとも一組の選択肢のペアについて，それらに対する自己の選好順序を社会的ランク付けに反映させることができる．

5. [15 点] 完備性と推移性をみたす選好のプロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ が与えられている．このとき任意の個人 $i \in I$ と任意の選択肢 $x \in X$ について，i が x 以上に好まない選択肢の数 $b_i(x) := b_i^R(x) := \#\{y \in X : xP_iy\}$ を決める．(集合 A にたいして，$\#A$ は A の要素の個数を表す．) プロファイル R における x の Borda count とはこの数の合計点

$$B^R(x) := \sum_{i=1}^{n} b_i(x) = b_1(x) + \cdots + b_n(x)$$

のことである．ボルダ・ルールとは Borda counts によって選択肢を比較する社会厚生関数である (高い得点ほど高いランキング)．すなわち $xR_0y \iff B^R(x) \geq B^R(y)$.

a. すべての個人が選択肢 x を選択肢 y より好んでいる．すなわちすべての $i \in I$ について，xP_iy である．このとき次のどれがいえるか [5 点]:
サ．すべての $i \in I$ について，$b_i(x) \geq b_i(y)$ となる．しかし $b_i(x) > b_i(y)$ となる $i \in I$ が存在するとは断定できない．
シ．すべての $i \in I$ について，$b_i(x) \geq b_i(y)$ となる．そして $b_i(x) > b_i(y)$ となる $i \in I$ が存在する．しかしすべてのすべての $i \in I$ について，$b_i(x) > b_i(y)$ となるとは断定できない．
ス．すべての $i \in I$ について，$b_i(x) > b_i(y)$ となる．
セ．上の選択肢のいずれも正しくない．

b. 選択肢の集合を $X = \{a, b, c\}$，個人の集合を $I = \{1, 2\}$ とする．ボルダ・ルールは〈無関係対象からの独立性〉を満たさないことを，以下のプロファイル R と R' を比較することによりしめそう [1 点× 10 問]:

$$R_1 : acb \qquad R_1' : abc$$
$$R_2 : bac \qquad R_2' : bca$$

集合 $\{y \in X : aP_1y\} = \{$_____$\}$ (要素をすべて列挙せよ) であるから,

$$b_1^R(a) := \#\{y \in X : aP_1y\} = \text{_____}(\text{数を記入}).$$

集合 $\{y \in X : aP_2y\} = \{$_____$\}$ (要素をすべて列挙せよ) であるから,

$$b_2^R(a) := \#\{y \in X : aP_2y\} = \text{_____}(\text{数を記入}).$$

よって $B^R(a) = b_1^R(a) + b_2^R(a) =$ _____ (数を記入) となる.
同様に, $B^R(b) = b_1^R(b) + b_2^R(b) =$ _____ (数を記入) となる.
したがって (以下の選択肢から選べ)
ア. $B^R(a) > B^R(b)$ により, aP_0b となる.
イ. $B^R(a) < B^R(b)$ により, bP_0a となる.
ウ. $B^R(a) = B^R(b)$ により, aI_0b となる.
一方, $B^{R'}(a) =$ _____ (数を記入) で $B^{R'}(b) =$ _____ (数を記入) となることから, $\langle aP_0'b$ となる, $bP_0'a$ となる, $aI_0'b$ となる$\rangle$ (1つ選べ).
選択肢 a, b にたいする相対的ランキングは, どの個人についてもプロファイル R と R' 間で同じであった. ところがそれらのプロファイルに対応する社会選好において, a, b にたいする相対的ランキングはプロファイル間で同じでない. したがってボルダ・ルールは無関係対象からの独立性をみたさないことがしめされた.

6. [5 点] 個人の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする ($n \geq 2$). 選択肢 (alternatives) の集合を X とする. X は少なくとも 3 つの要素を持つとする. X 上の選好の集合を $\mathcal{R}$ と書く. $\mathcal{R}$ に属するのは X 上の 2 項関係で, 完備性 (completeness) と推移性 (transitivity) とをみたすものとする. X の部分集合で有限 (finite) かつ非空 (nonempty) のもののあつまりを $\mathcal{F}$ とする. これらの集合はアジェンダと考えられる.
$\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ とする ($\mathcal{P}$ はある制限された選好の集合). **社会選択ルール** (social choice rule) とは関数

$$C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$$

であり, おのおのの アジェンダ $A \in \mathcal{F}$ とおのおのの選好プロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{P}^N$ にたいして, 非空の部分集合 $C(A, R) \subset A$ を対応させる.
いま X は 3 つ以上の選択肢からなるとする. $a \in X$ を特定の (固定された) 選択肢とする. 関数 $C_a : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ を $C_a(A, R) := \{a\}$ によって定義する. (i) C_a は社会選択ルールかどうかと (ii) その理由としてもっとも妥当なものとの組み合わせを選べ.
セ. 社会選択ルールである; $C_a(\{a, b, c\}, R) = \{a\}$ となることからいえる.
ン. 社会選択ルールである; $C_a(\{a\}, R) = \{a\}$ となることからいえる.
タ. 社会選択ルールである; $C_a(\{b\}, R) = \{a\}$ となることからいえる.
ク. 社会選択ルールではない; $C_a(\{a, b, c\}, R) = \{a\}$ となることからいえる.
シ. 社会選択ルールではない; $C_a(\{a\}, R) = \{a\}$ となることからいえる.
ガ. 社会選択ルールではない; $C_a(\{b\}, R) = \{a\}$ となることからいえる.

7. [5 点] 社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ が**条件** T をみたすとは:

$$\forall x, y \in X \ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{P}^N$$
$$[(\forall i \in N \ xP_iy) \longrightarrow \forall A \in \mathcal{F} \ (y \in A \to x \notin C(A, R))].$$

次の 2 つの解釈を考える:
(解釈 1) もし全員が x を y より好むならば, y が選ばれるときに x がアジェンダにふくまれることはない.
(解釈 2) もし全員が x を y より好むならば, y がアジェンダにふくまれているときに x が選ばれることはない.
いま社会選択ルール $C_0 : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ を $C_0(A, R) := A$ によって定義する. このとき (i) C_0 は条件 T をみたすかどうかと (ii) 条件 T の解釈として適当なものとの組み合わせを次から選べ.
タ. C_0 は条件 T をみたす; 解釈 1 が適当.
チ. C_0 は条件 T をみたす; 解釈 2 が適当.
ツ. C_0 は条件 T をみたさない; 解釈 1 が適当.
テ. C_0 は条件 T をみたさない; 解釈 2 が適当.

8. [10 点] 以下の定理 (最小限の自由にかんする Sen の定理の特殊形) の証明を考える:
選択肢の集合を $X = \{a, b, c\}$ とする. 権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$ において, すくなくとも 2 つの非空な提携 G, G' で重ならないもの (共通部分をもたない: $G \cap G' = \emptyset$) が, 非空で対称的な権利関係をもっているとする. (つまり G,

$G' \in \mathcal{G}$; そして xD_Gy ならばいつも yD_Gx となり，$xD_{G'}y$ ならばいつも $yD_{G'}x$ となる．) このとき，パレート条件をみたし $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{R}^N \to \mathcal{F}$ は存在しない．

証明．D_G と $D_{G'}$ が非空で対称的であることから，一般性を失わず $(a, c) \in D_G$ かつ $(c, b) \in D_{G'}$ と仮定できる．
いま，社会選択ルール C がパレート条件をみたし $D^{\mathcal{G}}$ を尊重するとする．以下のようなプロアイル R とアジェンダ $A = X$ を考える: すべての $i \in G$ について，bP_iaP_ic; すべての $j \notin G$ について，cP_jbP_ja.

- $c \notin C(X, R)$ であることを以下のようにしめせる: [空欄 1]
- $b \notin C(X, R)$ であることを以下のようにしめせる: [空欄 2]
- $a \notin C(X, R)$ であることを以下のようにしめせる: [空欄 3]

したがって $C(X, R) = \emptyset$ となり，矛盾が導かれた． ∎

上の証明の空欄で，パレート条件をもちいるのは〈空欄 1，空欄 2，空欄 3〉(すべて選べ) である [3 点].
上の証明の空欄で,「$(a, c) \in D_G$ かつすべての $i \in G$ について aP_ic である」ことをもちいるものがある．それはどれか?:〈空欄 1，空欄 2，空欄 3〉(すべて選べ) [3 点].
その (あるいはそれらの) 空欄では [4 点],
ア．C が D_G を尊重することをもちいる; C が $D_{G'}$ を尊重することももちいる．
イ．C が D_G を尊重することをもちいる; C が $D_{G'}$ を尊重することはもいちなくていい．
ウ．C が D_G を尊重することはもちいなくていい; C が $D_{G'}$ を尊重することをもちいる．
エ．C が D_G を尊重することも C が $D_{G'}$ を尊重することももちいなくていい．

9. [10 点] 次の定理を証明する:
権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$ において，すくなくとも 2 人の個人 i, j が非空な権利関係 (対称的とはかぎらない) をもっており，それぞれの権利関係に属するペア $(x, y) \in D_{\{i\}}$ と $(z, w) \in D_{\{j\}}$ で，重ならない ($\{x, y\} \cap \{z, w\} = \emptyset$) ものがあるとする．このとき，パレート条件をみたし $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{R}^N \to \mathcal{F}$ は存在しない．

証明．社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{R}^N \to \mathcal{F}$ がパレート条件をみたし，$D^{\mathcal{G}}$ を尊重するとする．条件により，$(x, y) \in D_{\{i\}}$ かつ $(z, w) \in D_{\{j\}}$ かつ $\{x, y\} \cap \{z, w\} = \emptyset$ を仮定する．
以下のようなプロファイル R を考える:

$$R_i : wxyz$$
$$R_k : yzwx \quad \text{for all } k \neq i.$$

アジェンダ $A = \{x, y, z, w\}$ を考える．[**空白を埋めることにより残りの証明を完成させよ**．]
C がパレート条件をみたすことから以下がいえる [5 点]:

C が $D^{\mathcal{G}}$ を尊重することから以下がいえる [5 点]:

したがって $C(A, R) = \emptyset$ となり，矛盾が導かれた． ∎

10. [10 点] 権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$ とアジェンダ $A \subset X$ が与えられている．

ゲーム・フォーム $\Gamma_A = (S_A, g_A)$ が $D^{\mathcal{G}}$ にたいして**自由尊重ネコ型**であるとは以下で定義される:[1]

$$\forall x, y \in A\ \forall G \in \mathcal{G}\ \{xD_Gy \longrightarrow \\ \forall s \in S_A\ [y = g_A(s) \to \exists s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA}\ (x = g_A(s'_G, s_{-G}))]\}.$$

$N = \{1, 2\}$ で $A = \{a, b, c\}$ とする．権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle D_{\{1\}}, D_{\{2\}} \rangle$ が $D_{\{1\}} = \{(a, c), (c, a)\}$ と $D_{\{2\}} = \{(b, c), (c, b)\}$ とから成っている．

べつの権利体系 $D^{\mathcal{G}'} = \langle D_{\{1\}} \rangle$ が $D_{\{1\}} = \{(a, c), (c, a)\}$ から成っている．

a. いまゲーム・フォーム (S_A, g_A) が以下の表で与えられている:

		Player 2	
		1	2
Player 1	1	c	b
	2	a	b

正しいものを選べ [5 点].
ジ．(S_A, g_A) は $D^{\mathcal{G}}$ にたいしても $D^{\mathcal{G}'}$ にたいしても自由尊重ネコ型である．
ユ．(S_A, g_A) は $D^{\mathcal{G}}$ にたいして自由尊重ネコ型であるが，$D^{\mathcal{G}'}$ にたいしては自由尊重ネコ型でない．
ウ．(S_A, g_A) は $D^{\mathcal{G}}$ にたいして自由尊重ネコ型でないが，$D^{\mathcal{G}'}$ にたいして自由尊重ネコ型である．
ソ．(S_A, g_A) は $D^{\mathcal{G}}$ にたいしても $D^{\mathcal{G}'}$ にたいしても自由尊重ネコ型でない．

ゲーム・フォーム (S_A, g_A) が $D^{\mathcal{G}}$ にたいして**自由尊重イヌ型**であるとは以下で定義される:

$$\forall x, y \in A\ \forall G \in \mathcal{G}\ \{xD_Gy \longrightarrow \\ \exists s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA}\ \forall s \in S_A\ [y = g_A(s) \to x = g_A(s'_G, s_{-G})]\}.$$

b. いまゲーム・フォーム (S'_A, g'_A) が以下の表で与えられている:

		Player 2	
		1	2
Player 1	1	c	b
	2	a	a
	3	c	c

正しいものを選べ [5 点].
イ．(S'_A, g'_A) は $D^{\mathcal{G}'}$ にたいして自由尊重ネコ型であり，自由尊重イヌ型である．
ヌ．(S'_A, g'_A) は $D^{\mathcal{G}'}$ にたいして自由尊重ネコ型であるが，自由尊重イヌ型でない．
ネ．(S'_A, g'_A) は $D^{\mathcal{G}'}$ にたいして自由尊重ネコ型でないが，自由尊重イヌ型である．
コ．(S'_A, g'_A) は $D^{\mathcal{G}'}$ にたいして自由尊重ネコ型でも自由尊重イヌ型でもない．

11. [10 点] 選好プロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n)$，アジェンダ $A \subset X$，権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$，社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$，そしてゲームフォーム (S_A, g_A) が与えられている．いま，ある戦略 (列)$s \in S_A$ と提携 $G \in \mathcal{G}$ とその提携の戦略 (列) $s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA}$ とが存在して，$y = g_A(s)$ かつ $x = g_A(s'_G, s_{-G})$，かつすべての $i \in G$ について xP_iy であることがいえたとする．

a. 次のどれがいえるか [5 点]:
ナ．社会選択ルール C が $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する．
ニ．社会選択ルール C が $D^{\mathcal{G}}$ を尊重しない．
ヌ．ゲームフォーム (S_A, g_A) は $D^{\mathcal{G}}$ にたいして自由尊重ネコ型 (問題 10 参照) である．
ネ．ゲームフォーム (S_A, g_A) は $D^{\mathcal{G}}$ にたいして自由尊重ネコ型 (問題 10 参照) でない．
ノ．以上の選択肢のどれもいえない．

b. 次のどれがいえるか [5 点]:
ハ．戦略 $s = (s_G, s_{-G})$ はゲーム (S_A, g_A, R) の $\mathcal{G}$-強均衡である．
ヒ．戦略 $s = (s_G, s_{-G})$ はゲーム (S_A, g_A, R) の $\mathcal{G}$-強均衡でない．
フ．戦略 (s'_G, s_{-G}) はゲーム (S_A, g_A, R) の $\mathcal{G}$-強均衡である．
ヘ．戦略 (s'_G, s_{-G}) はゲーム (S_A, g_A, R) の $\mathcal{G}$-強均衡でない．
ホ．以上の選択肢のどれもいえない．

[1] $s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA}$ は G に属する個人の戦略の列で $s_{-G} \in \prod_{i \notin G} S_{iA}$ は G に属さない個人の戦略の列．たとえば $N = \{1, 2, 3, 4\}$ で $G = \{1, 4\}$ のとき，$s'_G = (s'_1, s'_4) \in S_{1A} \times S_{4A}$，$s_{-G} = (s_2, s_3) \in S_{2A} \times S_{3A}$，$(s'_G, s_{-G}) = (s'_1, s_2, s_3, s'_4)$．もちろん $s = (s_G, s_{-G})$ と書ける．