権利論への数理的アプローチ:
レクチャー・ノート[1]
(Theory of Rights: A Mathematical Approach)

三原麗珠[2]
reiju@ec.kagawa-u.ac.jp (H. Reiju Mihara)
香川大学経済学部

1999 年 8 月 3 日のバージョン

[1] このノートの dvi file および pdf file そして一部の図 (pdf file) は，三原麗珠の Web page にて入手できます．pLaTeX 2ε input files が欲しい方はご連絡ください．
[2] http://www.ec.kagawa-u.ac.jp/~reiju/

目 次

第 1 章　プレリュード **3**
1.1　予知夢 3
1.1.1　見えざる手の定理 (The Invisible Hand Theorem) . . . 3
1.1.2　囚人のジレンマ (The Prisoner's Dilemma) 4
1.1.3　『チャタレー夫人の恋人』(*The Lady Chatterley's Lover*) の例 5
1.2　この講義〈権利論への数理的アプローチ〉について 6
1.3　出発点: 自由主義のパラドックス (The Liberal Paradox) . . . 8
1.4　講師について 9
1.5　文献案内 10

第 2 章　数学のことば: 集合と写像 **11**
2.1　集合，関数，直積 12
2.2　合成関数と逆関数 18
2.3　文献案内 19

第 3 章　社会厚生関数，Sen の定理，Saari の批判 (仮題) **20**
3.1　はじめに 20
3.2　フレームワーク 21
3.3　センの定理とその証明 26
3.4　誤った定式化? 27
3.5　Saari の解決 31
3.6　文献案内 34

第 4 章　権利の譲渡，Gibbard の解決 (仮題) **35**

第 5 章　社会選択ルール，ゲーム・フォーム，提携のパワー (仮題) **36**
5.1　はじめに 36
5.2　フレームワーク 37
5.3　社会選択ルールと Sen の定理 38
5.3.1 38
5.3.2 39
5.3.3 41

5.4 Gibbard のパラドックス: 権利体系の内部整合性 42
5.4.1 42
5.4.2 非協力ゲーム理論の予備知識 46
5.5 ゲーム・フォームによるアプローチ 50
5.6 拡張された選択肢 53
5.7 文献案内 55

第1章　プレリュード

ウエルカム．この講義は唐突に始まる．

1.1　予知夢

いくつかの断片．それぞれの分野では有名な例，あるいは命題.

1.1.1　見えざる手の定理 (The Invisible Hand Theorem)

厚生経済学の第一命題 (The first proposition of welfare economics) とも呼ばれる．たぶん**経済学** (economics) でもっとも重要な定理 (theorem)(ミクロ経済学 (microeconomics) や公共経済学 (public economics) で学ぶ) .

- 「市場メカニズム (market mechanism)(価格メカニズム (price mechanism)) は優れている」,「価格メカニズムのもとで，人びとが自分だけの利益を追及して自由に競争すれば，(意図してもいないのに，まるで神の見えざる手 (invisible hand) に導かれるみたいに) 社会全体にとっての利益を実現できる」といった (経済学の創始者アダム・スミス (Adam Smith) にはじまる) アイディアの現代的表現.
- 個人の合理的な行動 (rational behavior) , 私有財産権 (private property rights) の尊重，外部性 (externalities) (他人の消費を気にすることなど) の不在，そしてもちろん競争と価格，などが鍵.

専門用語を定義せずにその内容を述べると:

厚生経済学の第一命題 私有財産権の確立された経済の**競争均衡配分** (competitive equilibrium allocations) x は**パレート効率** (Pareto efficient) である．つまり全員が x より好むような**配分** (allocations) y は実現不可能 (not feasible) である.

われわれにとってのポイントは，この命題が「**個人の財産権の尊重が社会的な効率性を実現する**」と主張していること.

おまけ. 厚生経済学の第一命題をもう少し詳しく書いてみる．厳密には数理的に表現される:「私有財産権 (所有権) の確立された経済を考えよう．ひとびとは自分が

所有権を持つ財だけを消費することができ，それぞれの財 (商品) について，自分がどれだけそれを消費できるかだけを気にするとする．つまり他の人の消費は気にしない．[いくつかの条件を省略.] いまあらゆる財の価格がすべての財の需要量と供給量をバランスするように決まっているとする．また，ひとびとはこれらの価格を与えられたものとして，それぞれの財にたいする所有権を自発的に交換することにより (この意味でひとびとの権利は尊重されている)，自分の満足を最大にしようとしているとする．その結果実現する配分 (各人がどの財をどれだけ消費するかを記述したリスト) は競争均衡配分と呼ばれる．競争均衡配分はパレート効率である．すなわちある配分 y が存在して，すべての人がその配分 y を競争均衡配分よりも好んでいるとすれば，その配分 y は実現不可能である.」 ‖

1.1.2 囚人のジレンマ (The Prisoner's Dilemma)

非協力ゲーム理論 (noncooperative game theory) の分野でもっとも有名な例.「ジレンマ」とは窮地，板挟み，困難な状況のこと.

ある犯罪の容疑者２人 (じつは共犯) が別件で逮捕された．自白を引きだすために，取り調べ人 (検事？) は２人を隔離してそれぞれの容疑者に脅し (はったり？) をかける (共犯であることは見抜いている; あとは自白が欲しい)：

- ２人とも黙秘を続ければともに 1 年の刑 (別件で)，
- １人だけが自白すれば直ちに釈放で相手は 9 年の刑,
- ２人とも自白すればともに 6 年の刑になる.

この状況を非協力ゲーム理論の言葉に直そう．この**戦略ゲーム** (strategic game) の

- **プレーヤー** (players) は囚人 1 と囚人 2 で,
- それぞれのプレーヤーは〈黙秘〉と〈自白〉という２つの **戦略** (strategies) を持つ.
- ２人の戦略の組 (ペア) のおのおのにたいして，それぞれのプレーヤの**利得** (payoff) を表にすれば下のようになる．たとえば戦略ペア 〈黙秘, 自白〉—つまり囚人 1 が黙秘して囚人 2 が自白する状況—での利得の組は $(-9, 0)$．(刑期をマイナスの利得とみなしている．)

		囚人 2	
		黙秘	自白
囚人 1	黙秘	$-1, -1$	$-9, 0$
	自白	$0, -9$	$-6, -6$

「２人の囚人は脅しを本気にして，できるだけ自分の刑期を短くしたいと考える」と仮定．つまりこのゲームを信じ，自分の利得を最大化したいと．すると

- ２人が隔離されている状況では，合理的なプレーヤは自白を選ぶだろう．相手が黙秘しようが自白しようが，自分は自白したほうが有利 (利得が高い) だから．(**演習**: 表でチェックせよ．)
- その結果実現する戦略ペアは〈自白, 自白〉で利得のペアは $(-6, -6)$.
- ところがふたりがともに黙秘する戦略ペア〈黙秘, 黙秘〉にたいする利得ペアは $(-1, -1)$．この方がどちらのプレーヤにとってもより望ましい．(「〈黙秘, 黙秘〉は〈自白, 自白〉よりも **パレート優位** (Pareto-superior) である」という．)

協力しあえばプレーヤー全員に利益があるのに，それぞれのプレーヤが相手に「ただ乗り (free riding)」しようとしてしまうため，その利益を実現できない．

現実社会でもこの種のジレンマはいろいろある．国際紛争，ゴミ収集所の清掃，など (佐伯 [20, pp. 190–192])．

1.1.3 『チャタレー夫人の恋人』(*The Lady Chatterley's Lover*) の例

社会選択理論 (social choice theory) の分野で (おそらく) 3 番目に有名な定理である〈センの定理〉(〈自由主義のパラドックス〉) の証明を説明するためにセンが出した例．数理権利論でもっとも有名な例．ここでは日本の実状に合わせて超訳．

アラーキー (写真家; 映像詩人) の『緊縛』という写真集がある．芸術的だとかエッチだとか汚いとか呼ばれているもの．(センの例では『チャタレー夫人の恋人』という小説をあげている．わいせつかどうかで裁判になったもの．ここで『緊縛』を選んだのは，この言葉のイメージがこの講義の分析的アプローチの緻密さを暗示するため．) 以下，社会選択理論の言葉で表す:

- 軟派の穴子 (Anarcho) と硬派の文子 (Bunko) という２人の**個人** (individuals) がいる．
- 『緊縛』をどうするかについて，２人の直面している**選択肢** (alternatives) は
  - $a =$〈穴子が見る; 文子は見ない〉,
  - $b =$〈文子が見る; 穴子は見ない〉,

– $c =$〈2人とも見ない〉,

の3つ．（〈2人とも見る〉という選択肢を入れても以下の分析には影響しない．）

- 選択肢にたいする2人の最小限の自由は，少なくとも以下の条件を満たすような**権利体系** (rights system) によって保証される．
  - a を選ぶか c を選ぶかの選択権は穴子にある (この2つの選択肢のちがいは穴子がアラーキー本を見るか見ないかだけ; どちらを選んでも，文子には影響しない);
  - b を選ぶか c を選ぶかの選択権は文子にある (同様の理由).
- それぞれの望む順 (**選好順序** (preferences) とよぶ) にしたがって選択肢を (より望ましいものから) 並べれば以下の通り:
  - 穴子: bac (「こんなすばらしいゲージュツを2人とも見ないなんて最悪; 1人だけ見られるなら，文子に見せて教育しなきゃ」);
  - 文子: cba (「こんな汚い写真集はだれも見ないのがいい; でも穴子が見て悪影響を受けるよりは自分が見たほうがマシ」).

いま，上の権利体系を**尊重する** (respects) ようなルール (ルールとは?; 定式化と解釈は第??節で) を考える．すると上の3つの選択肢のどれも実現可能な状況では：

- 選択肢 c は選ばれない．（a，c 間の選択権を持つ穴子が a の方を望んでいるから．）
- 選択肢 b は選ばれない．（**演習**: なぜか? [文子に注目．]）
- ところが残る選択肢 a よりも b の方が2人どちらにとっても望ましい．（「b は a よりも**パレート優位** (Pareto-superior) である」という．）

個人の権利を尊重した結果，だれも望まない選択肢だけが残ってしまった．

1.2 この講義〈権利論への数理的アプローチ〉について

この講義の対象，あるいはテーマ:

- どのように権利体系（そして社会的ルール）を定めればひとびとの自由が守られるだろうか？
- かりにそのような権利体系があったとしても，そのもとでひとびとが自由に行動した結果が，だれも望まないものになることはないのか？

- 規範的課題 (「どういう社会が望ましいのか?」といった価値判断にかかわる) である.
- 実証的課題 (「現実の社会はどうなっているのか?」といった事実判断にかかわる) とはいいがたい.
- 哲学，倫理学，法学，政治学，経済学などにかかわるテーマ.

対象への接近方法 (アプローチ): 主に**社会選択理論** (social choice theory) (社会的選択理論とも) と**ゲーム理論** (game theory) による.

- 分析的，抽象的.
- 数理的，公理的 (たとえば「人びとは最小限の自由を持つ」といった社会的要請を数学的・形式的に表現)—自然言語の曖昧さを排除.
- 方法としては (ミクロ) 経済理論，抽象数学や論理学と密接に関連.
- 制度を細かく記述したり，歴史的・文化的理由に訴えたりはしない.
- 訓詁学・解釈学 (先哲の思想や法律の条文を解き明かす作業など) ともぜんぜんちがう.

目標:

- この分野の研究の最前線に迫る．(模索しながら講義を進めていくので，完成度の高い講義にはならないかもしれない．)
- 近い将来この分野で世界的貢献ができる受講生を育てる.
- 数理的言語能力のトレーニングをする．(教養教育の目標として伝統的にあげられてきたもの．)
- 社会現象を〈構造的に〉捉える (世界をさまざまな事物の〈**関係** (relations)〉として捉える) 能力を開発する.
- 社会理論を構築するための方法論を理解してもらう.
- ある程度深まりのある (表面的ではない) 学際的関心を育てる.
- (歴史・文化・社会制度の記述の要求されないような) 普遍性の高い学問分野 (たとえば論理学，数学，経済理論，物理学) を英語で理解するのは日本語で理解するのと同じくらい容易であることを疑似体験してもらう.

予備知識:

- 特になし.
- 数学的・分析的な思考法の苦手な学生にはこの講義をすすめない.
- パズル風の数学.
- だからといって試験が予測不可能だということはない．演習問題の類題を出す.

1.3 出発点: 自由主義のパラドックス (The Liberal Paradox)

この講義の出発点はアマルティア・セン (Amartya K. Sen) (1998 年ノーベル経済科学賞受賞; 理由は倫理学者でもあるセンが印度の聖人のようにモラリストだったからという噂も) による次の定理 (1970):

最小限の自由にかんするセンの定理 つぎの 2 つの要請 (条件) をともにみたす**社会的ルール**（社会として選ぶべき選択肢を，ひとびとの選好にもとづいて決定する）[図] は存在しない:

パレート効率性 (Pareto-efficiency) 全員一致しての選好は (このルールによる) 社会的決定にかならず反映される．(全員が選択肢 x より好むような選択肢 y が実現可能なとき，x が選択されることはない．つまりこのルールがある選択肢 x を選択するなら，全員が x より好むような選択肢 y は実現不可能である．) [図]

最小限の自由 (Minimal Liberty) このルールは少なくとも 2 人の個人に何らかの選択権を与えるような**権利体系**を尊重する．

個人の自由とパレート効率性（**全員一致の条件** (unanimity) ともよばれ，民主主義的要請のひとつ）とを両立させることはできないことを主張．(抽象化・定式化は上の表現でも不十分．選好とは?ルールとは?権利体系とは?「ルールが権利体系を尊重する」とは?—第 3 章以降ではすべて数学の言葉に翻訳する．)

例. 〈チャタレー夫人の恋人の例〉(第 1.1.3 節) で考えた権利体系は穴子と文子にたしかに何らかの選択権を与えていた．たとえば穴子は選択肢〈穴子が見る; 文子は見ない〉と選択肢〈2 人とも見ない〉の間の選択権を持っていた．

- この権利体系を尊重するルールは〈最小限の自由〉という要請をみたす．
- この権利体系を尊重するルールはパレート効率性をみたさなかった．これはたまたまそうなったわけではなく，センの定理の論理的帰結である．(**演習**: なぜセンの定理の帰結といえるのか？)

||

センの定理はどこかおかしくないか? センの定理は何を主張しているのか? 次のような素朴な疑問に注目 (講義が進むにつれて解答が明らかになる):

- 〈チャタレー夫人の恋人の例〉は特殊な例にすぎなかった．センの定理はそこでの教訓を一般化したステートメント (言明，文) になってい

る．だがこの例は (選択肢が 3 つの場合については) センの定理の証明になっているという．どうしてか?

- 見えざる手の定理は合理的な個人の自由な選択がある条件のもとでパレート効率性を実現することを一般的に主張．囚人のジレンマと〈チャタレー夫人の恋人の例〉は，合理的な個人の自由な選択が，効率性に反する結果を導く特殊例．これらの例に見えざる手の定理があてはまらないのはなぜか?

- 見えざる手の定理は個人の財産権の尊重が**つねに**パレート効率性を実現することを主張．一方，センの定理は個人の権利の尊重がパレート効率性を実現することは**ありえない**と主張．２つの定理の内容には驚くべき差がある．これらの定理は矛盾しないか?

- 非協力ゲーム理論で常識となっている〈囚人のジレンマ〉はセンの定理と何か関係があるか? ゲーム理論の観点から見たとき，センの定理の主張は驚くべき内容を持つか?

この講義ではセンの定理にたいする反論や代案のいくつかを見ていく．

- **初期の議論**からは，たとえば
  - 「権利の行使を保留することを認めれば，センのいう両立不可能性を避けることができる」(Gibbard [4]) とか,
  - 「他人の権利を侵害してまで自分の希望がカウントされることを望まない個人がいれば，センの不可能性は避けられる」(Suzumura [**?**]),

  といったものをとりあげる．

- **それ以降の議論**からは,
  - 「センは問題設定（定式化）を誤っている」(Saari [15]) とか,
  - 「正しい（あるいは少なくともべつの）定式化はこうだ」(Gardenfors [3]; Peleg [14]),

  などを取り上げる．

1.4 講師について

三原麗珠 (H. Reiju Mihara)
郵便: 〒 760-8523 高松市 香川大学経済学部
Mail: reiju@ec.kagawa-u.ac.jp
Web: http://www.ec.kagawa-u.ac.jp/~reiju/

ファックス (共用): 087-832-1820
電話: 087-832-1831
オフィス: 経済学部本館 3 階北ウイング付近

本の著者紹介ふうに書くと: 専門は経済理論, 規範経済学, 公共経済学. *Economic Theory*, *Journal of Mathematical Economics*, *Mathematical Logic Quarterly*, *Social Choice and Welfare* などの専門誌に主に社会選択理論にかんする論文を発表. 権利論にかんする論文はないが (とは著者紹介だったら書かないだろうな), 関心は強い. 権利論周辺で重要な貢献をしたいと思っている (とも著者紹介には書かないだろうな). 他に無政府資本主義 (anarcho-capitalism) に関心がある. 学位はミネソタ大学から経済学で取得.

1.5 文献案内

読みやすくておもしろいのは佐伯 [20] の pp. 8-10, pp. 55-71, pp. 111-161 (第 4 章).

初期の話題をカバーしたもの: Sen [16] (セン [17] に邦訳), 鈴村 [23], Suzumura [18], Kelly [8].

倫理学・法哲学・政治哲学などで数理権利論を採り上げたものとしては川本 [19] がある. 塩野谷 [21] が採り上げているのは数理権利論とはいいがたいが, 関係が深い. その他, セン [17] の巻末の文献案内に譲る.

第2章　数学のことば: 集合と写像

この章のための必読文献: 永谷裕昭『経済数学』[25] の第 2 章 1 節（集合, 関数, 直積）第 2 章 2 節 (合成関数と逆関数). できれば第 1 章 (学習のための準備) も読むといい.

数学をもちいる理由: われわれの目標のひとつは社会理論の構築方法を理解することである. ある分野, あるいはことがら (たとえば特定の投票メカニズム), にかんする**理論**とはその分野やことがらを記述する文の集まりであると考えられる. 記述を行うには**言語**が必要. その言語はできるだけ曖昧さのないものが望ましい. 日本語などの自然言語では曖昧さを取り除くことは不可能でないにしても, 困難. そのため, 理論を記述するための言語として, われわれは数学をもちいる. 数学の言葉に翻訳できなければ理論として認めない立場を取る.

今後このレクチャーノートはところどころ英語で書くことにする.

- 参考文献の大部分が英語. 次章以降はレクチャーノートが英語であるほうが, 文献を参照するとき分かりやすいだろう.
- この章以降は内容が数学的になるので, 英語はたいしてむずかしくない.
- 専門用語は日本語でも英語でも未知の単語である場合が多い.
- この章の内容はすでに知っているものが多いだろうし, 必読文献も日本語である. 英語にシフトするなら, あとでシフトするより今する方がよい.
- 哲学的議論など, 英文がむずかしくなりそうなところはできるだけ日本語で書くし, 口頭による説明は日本語を中心に行うので, 心配はないだろう.
- 用語については, 日本語訳をできるだけ添える.
- 評判が悪すぎたら, あとで日本語に戻る.
- 大学生なら, 英語くらい使いこなせなきゃ.

2.1 集合，関数，直積

A **set** (集合) is a collection of **elements** (要素; members). (Axiomatic set theory (公理的集合論) deals with these notions (概念) in a rigorous (厳密な) manner.) Examples (例):

- $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ is the set of positive (正の) natural numbers (自然数). [1]
- $\{4, 5, 6\} = \{z : z \in \mathbf{N}, 3 < z < 7\} = \{z \in \mathbf{N} : 3 < z < 7\}$.
- The set $\mathbf{R} := \{x : x \text{ is a real number}\}$ of real numbers (実数) is represented by the real line (数直線). We cannot list all its members.
- The set $I = \{$穴子, 文子$\}$ consists of (the names of) certain individuals (個人).

When a is an element of a set X (a **belongs to** (属する) X; a is **contained in** (含まれる) X), we write $a \in X$. When a is not an element of X, we write $a \notin X$. Examples: $1.4 \notin \mathbf{N}$, $1.4 \in \mathbf{R}$, $\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$, $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$.

The **empty set** (空集合) $\emptyset$ contains no element.

A set X is a **subset** (部分集合) of a set Y (written $X \subset Y$) if every member (element) of X is also a member of Y:

$$\text{for all } x,\ x \in X \text{ implies } x \in Y.$$

[すべての x について，$x \in X$ は $x \in Y$ を含意する (もし $x \in X$ ならば $x \in Y$ である)．] Examples: $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$. For any set X, we have $\emptyset \subset X$.

Example: In social choice theory (社会選択理論),

- a subset $S \subset I$ of the set I of individuals is often called a **coalition** (提携，結託);
- a subset $B \subset X$ of the set X of alternatives (選択肢) is often called an **agenda** (アジェンダ; 議題?) or budget set (予算集合?).

||

Proposition(命題) . For all sets X, Y, Z, we have

- $X \subset X$, and
- $X \subset Y$ and $Y \subset Z$ imply $X \subset Z$.

[1] 記号 := は「定義により等しい」ことをしめす．左辺を右辺で定義.

Sets X and Y are **equal** (等しい) (written $X = Y$) if $X \subset Y$ and $Y \subset X$.
The **union** (和集合) of sets X and Y is the set

$$X \cup Y := \{x : x \in X \text{ or } x \in Y\}.$$

Example: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.
Proposition. For all sets X, Y, Z, we have

- $X \cup Y = Y \cup X$,
- $X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$,
- $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ [these are written $X \cup Y \cup Z$],
- $X \subset X \cup Y$ and $Y \subset X \cup Y$, and
- $X \cup X = X$.

The **intersection** (共通集合) of sets X and Y is the set

$$X \cap Y := \{x : x \in X \text{ and } x \in Y\}.$$

Examples: $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{2\}$. $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$.
Proposition. For all sets X, Y, Z, we have

- $X \cap Y = Y \cap X$,
- $X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$ [永谷第 1 刷に印刷ミス],
- $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$[these are written $X \cap Y \cap Z$],
- $X \cap Y \subset X$ and $X \cap Y \subset Y$, and
- $X \cap X = X$.

Theorem (定理). Let X, Y, Z be sets. We have

- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, and
- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

The **difference** (差) of sets A and B is the set

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}.$$

When $A \subset X$ and the underlying set X is understood, we write A^c instead of $X \setminus A$ and call it the **complement** (補集合) of A.

Examples: $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 4\} = \{2, 3\}$. $\{x \in \mathbf{R} : x < 0\}^c = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$, the set of nonnegative (非負の) real numbers.

Theorem (定理). Let $A \subset X$ and $B \subset X$. Then

- $A^{cc} = A$,
- $\emptyset^c = X$ and $X^c = \emptyset$,
- $A \cap A^c = \emptyset$ and $A \cup A^c = X$,
- $A \subset B$ implies $B^c \subset A^c$, and
- $A \setminus B = A \cap B^c$.

A set may contain sets. A set consisting of sets is often called a **collection** or a **family** (集合族) or a class.

The set $\{A : A \subset X\}$ consisting of all the subsets of X is called the **power set** (ベキ集合) of X.

Let $\Lambda \neq \emptyset$. (*Lambda* is read lambda (ラムダ).) Suppose that for each $\lambda \in \Lambda$, a set A_λ is defined. Then the **union** and the **intersection** of the family $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ are defined as follows:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x : x \in A_\lambda \text{ for some } \lambda \in \Lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x : x \in A_\lambda \text{ for all } \lambda \in \Lambda\}.$$

Example. If $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, then

$$\bigcap_{i \in I} P_i = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_n.$$

Theorem (De Morgan). Let $A_\lambda \subset X$ for each $\lambda \in \Lambda$. Then

- $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$, and
- $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$.

Let X and Y be sets. An **ordered pair** (順序対) is the list (x, y) of a X-**component** (成分) $x \in X$ and Y-component $y \in Y$ such that the equality is defined as follows: for any x, $x' \in X$ and y, $y' \in Y$, $(x, y) = (x', y')$ if and only if $x = x'$ and $y = y'$.

Example: $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ (as sets), but $(1, 2) \neq (2, 1)$ (as ordered pairs).

The **Cartesian product** (直積) of X and Y is the set

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

We can write $X \times X$ as X^2.

Examples: Let $A = [0, 1] := \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ and $B = \{3, 4\}$. Then $A \times A = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ [figure: a rectangular

area]. $A \times B = \{(a,b) \in R^2 : 0 \le y \le 1 \text{ and } (b = 3 \text{ or } b = 4)\}$ [figure: two segments].

A subset F of the Cartesian product $X \times Y$ is called a **(binary) relation** ((2 項) 関係). We often write $(x,y) \in F$ as xFy.

Example: Let I be a set of all human beings (including the dead) and let $M = \{(i,j) \in I^2 : \ i \text{ is a mother of } j\}$. Then for any $i \in I$, $(i,i) \notin M$. Also, for all $i \in I$ (ignoring Adam and Eve, the first human beings), there is $j \in I$ such that $(j,i) \in M$ (everybody has her or his mother).

Example: $X = \{$ グー, チョキ, パー $\}$ とする．B を X 上の次の関係とする:

$$xBy \iff \text{じゃんけんで } x \text{ は } y \text{ に勝つ.}$$

B の要素を列挙すると $B = \{(\text{グー}, \text{チョキ}), (\text{チョキ}, \text{パー}), (\text{パー}, \text{グー})\}$ となる．

理論化の方法論の話に戻る．個人の好みを定式化しよう．好みは「私は○○ほうが××以上に好きだ」といった,「もの」と「もの」とを比較する文の集まりとして表現できる．それぞれの「もの」はある集合 X の要素 (選択肢とよぶ) であると考える．上の文は，○○を x，××を y と書き，ある R という関係を使って，xRy と記号化できる．つまり

$$xRy \iff \text{私は } x \text{ のほうが } y \text{ 以上に好きである.}$$

[$\iff$ は if and only if の意．つまり左辺と右辺が同等．] 上の表現は右辺の自然言語による文を左辺の数学的表現に記号化している．右辺の文の意味が抜け落ちている．意味を抜くことは曖昧さを取り除くために必要な作業であった．しかし必要以上に意味が抜けるのはわれわれの望むところではない．そこで右辺の文の意味をどうにかして左辺の数学的表現に取り込みたい．それは左辺の表現に，次に述べるようにある条件を与えることによってできる．

おまけ．しかし意味をすべて取り込むことができるわけではない．次に述べるように条件を課したあとであっても，xRy を「私は y のほうが x 以上に好きである」と (x，y 逆にして) 読まれる可能性は残っている．そのばあい，合理的な個人 (もっとも望ましい選択肢を実現しようとする個人) を想定してつくられた理論は，もっとも望ましくない選択肢を実現しようとする個人からなる世界を記述する理論として読まれることになる．しかしそのような不自然な理論はたとえ整合的であっても，あまり意味のあるものではない． ‖

Definition (定義). Let X be a set of **alternatives** (選択肢). A **preference** (選好), or a preference ordering (選好順序), $R \subset X \times X$ on X is a relation satisfying the following conditions:

completeness (完備性) for all x, y in X, either xRy or yRx, and

transitivity (推移性) for all x, y, z in X, if xRy and yRz, then xRz.

Let

$$\mathcal{R} := \{R \subset X \times X : R \text{ is complete and transitive}\}$$

be the set of preferences on X. [Note that the letter $\mathcal{R}$ is a special (calligraphic) font.] [選好は特定の個人の「好み」にかんする情報を集約．]

Intuitively, xRy if and only if x is at least as good as y (y is not preferred to x). [Completeness then means that given two alternatives, one is at least as good as the other. Transitivity means that if a first alternative is at least as good as a second, which is at least as good as a third, then the first alternative is at least as good as the third.]

Example: If $X = \{a, b\}$, then $\mathcal{R} = \{R^1, R^2, R^3\}$, where $R^1 : ab$ (a is preferred to b), $R^2 : ba$, and $R^3 : [ab]$ (a and b are indifferent; neither is preferred to the other).

When a relation $f \subset X \times Y$ satisfies the following conditions, f is called a **function** (関数), or a map(ping) (写像), from X into Y (written $f\colon X \to Y$):

- for any $x \in X$, there is $y \in Y$ such that $(x, y) \in f$,
- if $(x, y) \in f$ and $(x, y') \in f$, then $y = y'$.

[Figure: $X = Y = [0, 1]$. Not a function. A function.] A function $f\colon X \to Y$ maps each element of X into one and only one element of Y.

Example. $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = x^2 + 1$ is a function. One can write $f\colon x \mapsto x^2 + 1$ to avoid ambiguity that the expression $f(x)$ has. [Is $f(x)$ a function where x is a variable (変数) or a particular real number for a particular x?]

Example. Let I be a set of all human beings (including the dead) and let $M = \{(i, j) \in I^2 : i \text{ is a mother of } j\}$. Then M is not a function from I into I. An individual i may be a mother of no j; i may be a mother of different j and j'.

For functions $f\colon X \to Y$ and $g\colon X \to Y$, $f = g$ iff for all $x \in X$, $f(x) = g(x)$.

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be sets, where $n > 0$ is a positive natural number. An n-**tuple** (組) is the list $(x_1, \ldots, x_n)$ of components $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ such that the equality is defined as follows: for any $x_1, x_1' \in X_1, \ldots, x_n, x_n' \in X_n$,

$$(x_1, \ldots, x_n) = (x_1', \ldots, x_n') \iff x_1 = x_1', \ldots, x_n = x_n'.$$

The product of $X_1, \ldots, X_n$ is the set

$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

When $X_1 = \cdots = X_n = X$, we write $X_1 \times \cdots \times X_n$ as X^n.

We can regard the tuple $(x_1, \ldots, x_n)$ as a function $x\colon \{1, \ldots, n\} \to X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Then a product can be regarded as a set of functions.

Definition. Let $I = \{1, \ldots, n\}$ be a set of individuals and X a set of alternatives. Suppose that for each individual $i \in I$, her preference $R_i \in \mathcal{R}$ is defined. Then a **profile** of individual preferences (選好プロファイル) is the n-tuple $(R_1, \ldots, R_n)$. The profile describes who has which preference. [選好プロファイルは全員の「好み」にかんする情報を集約．]

Example. One can interpret (解釈する)

- the coalition $\{i \in I : xR_iy\}$ as the set of individuals that like x at least as much as y (**weakly prefer** x to y) [given x and y];
- the preference $R_i = \{(x, y) : xR_iy\}$ as the collection of pairs (x, y) such that the individual i weakly prefers x to y [given i];
- the set $\{x : xR_iy\}$ as the set of alternatives that given i weakly prefers to a given y. [Compare with the set $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ of real numbers greater than or equal to 1.]

Exercise (演習). Interpret the following sets

- $\bigcap_{i \in I} R_i = \bigcap_{i \in I} \{(x, y) : xR_iy\}$,
- $\bigcap_{y \in X} \{x : xR_iy\}$.

Exercise. Let the set $X = \{a, b, c\}$ of alternatives consist of three elements and the set $I = \{1, 2, 3\}$ consist of three individuals. Suppose that the profile is given as follows:

$$R_1 : bac$$
$$R_2 : cba$$
$$R_3 : abc$$

(For example, individual 1 prefers b to a, and a to c.)

1. List all the elemets of the following sets (For each of the following sets, list its elements): $\{i \in I : bR_ia\}$, $\{i \in I : aR_ic\}$, $\{i \in I : aR_ia\}$.
2. List all the elements of the following sets: $\{x : xR_1a\}$, $\{x : xR_2a\}$, $\{x : xR_3a\}$.

A variant of this exercise is obtained by replacing the weak preferences R_i by the strict preferences P_i, to be introduced later.

2.2 合成関数と逆関数

Let $f\colon X \to Y$ be a function. ($f\colon x \mapsto f(x)$.) Then the **domain** (定義域) of the function is the set X. For $A \subset X$, the **image** (像) of A by f is the set $f(A) := \{y \in Y : y = f(x) \text{ for some } x \in A\} = \{f(x) : x \in A\}$. The image $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ of X is called the **range** (値域) of f.[2]

Let $f\colon X \to Y$ be a function. For $B \subset Y$, the **inverse image** (逆像) of B by f is the set $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$.

Example. Let $b\colon I \to X$ be a function that maps each individual $i \in I$ to the alternative

$$b(i) := \{x \in X : xR_iy \text{ for all } y \in X\} \in X$$

that she prefers the most (her best alternative). (We assume that there is only one such alternative.) Then for each $x \in X$, the set $\{i \in I : b(i) = x\}$ is the set of individuals that prefer x the most. For $B \subset X$, $b^{-1}(B) = \{i \in I : b(i) \in B\}$ is the set of individuals whose best alternative is in B. [Figure: Partition the set I of individuals according to their maximal elements a, b, c. Let $B = \{a, c\}$ and ask where is $b^{-1}(B)$?]

Let $f\colon X \to Y$ be a function. f is said to be **one-to-one** (1対1), or **injective** (単射), if for all x, $x' \in X$, $x \neq x'$ implies $f(x) \neq f(x')$. Equivalently (同値の言い方では), it is one-to-one if $f(x) = f(x')$ implies $x = x'$. f is said to be **onto** (上への), or **surjective** (全射), if $f(X) = Y$. Equivalently, it is onto if for all $y \in Y$, there is $x \in X$ such that $f(x) = y$.

Examples: $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ defined by $f\colon x \mapsto 2x$ is not onto but one-to-one. $g\colon \mathbf{N} \to \{0, 1\}$ defined by

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is even (偶数)} \\ 1 & \text{if } x \text{ is odd (奇数)} \end{cases}$$

is onto but not one-to-one.

A function that is one-to-one and onto is called a **permutation** (??) or a **bijection** (全単射).

Example: Let $X = \{a, b, c\}$. Then $f\colon X \to X$ given by $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ is a permutation.

Let $f\colon X \to Y$ and $g\colon Y' \to Z$ be functions and assume that $f(X) \subset Y'$. Then their **composite function** (合成関数) is the function $g \circ f\colon X \to Z$ that assigns $g(f(x))$ to each $x \in X$. [Figure]

Example: Let $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ and $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be given by $f(x) = x^2$ and $g(x) = x + 1$. Then $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$ and $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$.

[2] In some literature (文献), the word "range" refers to (指す) Y.

Given functions $f\colon X \to Y$ and $g\colon Y \to X$. g is said to be an **inverse**, or an inverse function (逆関数) of f if for all $x \in X$ and $y \in Y$,

$$g \circ f(x) = x$$

and

$$f \circ g(y) = y.$$

We can show that an inverse is uniquely determined. We thus call it the inverse of f and denote it by f^{-1}. We can also show that $g^{-1} = f$.

Proposition. Let $f\colon X \to Y$ be a function. Then f has an inverse if and only if f is one-to-one and onto.

2.3 文献案内

集合と写像についてもっと学びたければ，数学の授業を取るのがいい．演習書としては篠田，米澤 [22] などがある．

「集合とはなにか」とか「要素とはなにか」など，集合論のさらに深い話題を基礎からあつかった分野が公理的集合論である．公理的集合論をあつかったもののなかでいちばん分かりやすそうなのは次の Web page である．特に第 1 部と第 2 部をすすめる: 嘉田 勝. 公理的集合論ってなあに？
`http://diamond.idbsu.edu/~kada/html/settheory.html`

「すべての……」とか「……が存在する」といった言葉の使い方を分かりやすく解説した，次のページも有用: 嘉田 勝. 気まぐれ数学談話室第 3 話. どんな病気にも効く薬がある：数学で使う「言葉」のおはなし
`http://member.nifty.ne.jp/kada/mathl/mathl3.html`

第3章　社会厚生関数，Sen の定理，Saari の批判 (仮題)

3.1　はじめに

第 1.3 節では,〈最小限の自由にかんするセンの定理〉を紹介した．この節ではこの定理をこの章で定義する用語をもちいて言い直しておく．表現はちがうが，その主張するところはほぼ同じである:

センの定理（リベラル・パラドクス）：つぎの 2 つの条件を同時にみたす**社会厚生関数**（選択肢にたいする社会としての順序づけ (社会選好) を，ひとびとの選好にもとづいて決定するルール）は存在しない:

パレート条件 もし**全員が**選択肢 x を選択肢 y より望むならば，社会も x を y より高く順序づけなければならない (この関数で決まる社会選好は x を y より高くランクづけしなければならない)

最小限の自由 少なくとも 2 人の個人がそれぞれ少なくともひとつの選択肢ペア (x, y) にかんする選択権を与えられなければならない: もしペア (x, y) にかんする**選択権を持つ個人が**選択肢 x を選択肢 y より望めば，社会も x を y より高く順序づけなければならない; もしその個人が y を x より望めば，社会も y を x より高く順序づけなければならない.

おまけ. 第 1.3 節で紹介した〈最小限の自由にかんするセンの定理〉は〈社会選択関数〉とよばれるルールにかんする定理だった．上で導入した言い換えは〈社会厚生関数〉とよばれるルールにかんする定理．‖

いわゆる「個人的なことがら」は，本人の自由にまかせるべきだろう．たとえば他のすべての人が「仰向けに寝る方がいい」と主張しても，ある人が「自分はうつ伏せに寝るのがいい」というなら，その人の希望が認められるべきだろう．その人がうつ伏せに寝ることのできる状態はその人が仰向けに寝なければならない状態より社会的に望ましいと判断されるべきだろう．こういった要請をきちんと表現できるように定式化されたフレームワークを考えたい.

リマーク. フレームワークに入る前に，論理記号の読み方を導入する．$\forall$ は「すべての」，$\exists$ は「少なくとも 1 つの」あるいは「存在する」という意味に

ほぼ対応した記号．命題 Q と R が与えられたとき，命題 $Q \to R$ は「もし Q ならば R である」という条件文.（関数を表す記号と混同しないように.）記号の現れる順番には注意を要する．たとえば，I を個人の集合とするとき，

$$\forall i \in I\ \exists j \in I\ [j \text{ は } i \text{ を舐める}]$$

という文は「すべての個人 i にたいし，個人 j が存在して，j は i を舐める」，つまり「誰もが誰かに舐められる」という意味．一方，

$$\exists j \in I\ \forall i \in I\ [j \text{ は } i \text{ を舐める}]$$

という文は「ある個人 j が存在して，すべての個人 i にたいし，j は i を舐める」，つまり「みんなを舐める人がいる」という意味．‖

演習. つぎの命題のそれぞれについて，その真・偽を答えよ (それが真であるか偽であるかを判定せよ)．ただし $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする．

1. $\exists x \in \mathbf{N}\ \exists y \in \mathbf{N}\ [y > x]$
2. $\forall x \in \mathbf{N}\ \forall y \in \mathbf{N}\ [y > x]$
3. $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists y \in \mathbf{N}\ [y > x]$
4. $\exists y \in \mathbf{N}\ \forall x \in \mathbf{N}\ [y > x]$
5. $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists y \in \mathbf{N}\ [y \leq x]$
6. $\exists y \in \mathbf{N}\ \forall x \in \mathbf{N}\ [y \leq x]$.

3.2 フレームワーク

The framework consists of the following:

- A finite [有限の] set $I = \{1, \ldots, n\}$ of **individuals**.[1]
- A set X of **alternatives** [選択肢]. X has at least three elements.
  - 選択肢の意図するものは「パン」とか「ご飯」とか「ミニスカート」とか「ロングスカート」といった具体的なモノでも，それらを選ぶ行為でもない.
  - 選択肢はミクロ経済学でいう「配分」(どの個人がどの財をどれだけ消費しているかを表したリスト) に近い．たとえば $((1, 2), (3, 4))$ という配分は，個人 1 がアップルジュースを 1 単位，ビールを 2 単位，個人 2 がアップルジュースを 3 単位，ビールを 4 単位消費している状態を表した.

[1] I は後で出てくる無差別関係と同じ記号になってしまった．これはミス．将来のバージョンでは訂正する.

- つまり選択肢は関連のある社会的状態をすべて記述したもの．それぞれの個人やグループがおかれている状態を記述．例: 2人の同居する社会での選択肢はたとえば以下のように書ける:
  * $x = ((\text{ミニスカート}, \text{パン}, \ldots), (\text{パンツ}, \text{ご飯}, \ldots), (\text{冷房}, \ldots))$
  * $y = (\underbrace{(\text{ロングスカート}, \text{パン}, \ldots)}_{\text{個人 1 の状態}}, \underbrace{(\text{パンツ}, \text{ご飯}, \ldots)}_{\text{個人 2 の状態}}, \underbrace{(\text{冷房}, \ldots)}_{\text{共通する状態}})$.

- The set

$$\mathcal{R} := \{R \subset X \times X : R \text{ is complete and transitive}\}$$

of (complete and transitive) **preferences** on X.

- Recall the conditions for $R \in \mathcal{R}$:

  completeness $\forall x \in X\ \forall y \in X\ [xRy \text{ or } yRx]$.

  transitivity $\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X\ [(xRy\ \&\ yRz) \to xRz]$.

- **Exercise**. Suppose that $R \in \mathcal{R}$. Show that it satisfies the following condition:

  reflexivity (反射性) $\forall x \in X\ xRx$.

- Given a (weak) preference R on X, define the corresponding [対応する] **strict preference** [強い選好] P and the **indifference relation** [無差別関係] I by[2]

$$xPy \iff (xRy\ \&\ \neg yRx)$$

  and

$$xIy \iff (xRy\ \&\ yRx).$$

  (不等号 $\geq$ が与えられたとき，不等号 $>$ と等号 $=$ を定義するやり方に対応．) Similarly for R_i, R'_i, and other preference relations with subscripts or superscripts.

- The intended interpretation:

$$xP_iy \iff i \text{ (strictly) prefers } x \text{ to } y.$$

$$xI_iy \iff i \text{ is indifferent between } x \text{ and } y.$$

- **Exercise**. Check that $I \cap P = \emptyset$ and $I \cup P = R$.

- **Exercise**. List all those preferences on the set $\{a, b, c\}$ such that no two distinct alternatives are indifferent. (If $x \neq y$ then $\neg xIy$; such preferences are called **strong**) [集合 $\{a, b, c\}$ 上の選好で，異なる選択肢が無差別にならないものをすべてあげよ．]

[2] $\neg yRx$ is the **negation** [否定] of yRx.

- **Exercise**. Suppose that R_i is a preference. Show that if xR_iy and yP_iz, then xP_iz.
- **Exercise**. Show that a strict preference P defined above is transitive.
- **Exercise**. Show that a strict preference P defined above is irreflexive: xPx cannnot hold for any $x \in X$.
- It can be shown that I is reflexive, transitive, and **symmetric** [対称] (xIy implies yIx).

- A **social welfare funciton** (社会厚生関数) $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ is a function mapping each preference profile $R := (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ into a preference (called **social preference** [社会選好]) $R_0 := f(R) = f(R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}$. (The subscript 0 represents the society, not an individual.)
  - ここでは R が選好ではなく，選好プロファイルを指していることに注意．記号の混乱すみません．
  - Figure: three people, three alternatives
  - Given a social preference $R_0 = f(R)$, the corresponding strict preference is denoted by P_0 and the indifference by I_0.

Definition. The social welfare function $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ is **Paretian**, or satisfies the **Pareto condition** [パレート条件], if

$$\forall (x, y) \in X^2 \ \forall (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n \ [(\forall i \in I \ xP_iy) \longrightarrow xP_0y].$$

That is, f is Paretian if for any pair (x, y) of alternatives, and for any preference profile R, we have that x is socially preferred to y (xP_0y) whenever xP_iy for every i. [Figure]

Conditioins for **individual liberty** [個人の自由] are expressed by the following axioms [公理]:

- The social welfare function $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ satisfies **Minimal Liberty for Everyone** [全員にとっての最小限の自由], if

$$\forall i \in I \ \exists (x, y) \in X^2 \ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$$
$$[(x \neq y) \ \& \ (xP_iy \to xP_0y) \ \& \ (yP_ix \to yP_0x)].$$

  That is, f satisfies Minimal Liberty for Everyone if every individual has a pair (x, y) of distinct alternatives such that for any profile R, we have that x is socially preferred to y whenever she prefers x to y

and that y is socially preferred to x whenever she prefers y to x. [すべての個人は，少なくとも一組の選択肢のペアについて，それらに対する自己の選好順序を社会選好に反映させることができる．]

- それぞれの個人に，少なくとも一組のペアにかんする選択権を要請しているだけ．ひじょうに弱い条件.
- そのようなペアの候補としてはたとえば前述の例
  - $x = ((\text{ミニスカート}, \text{パン}, \ldots), (\text{パンツ}, \text{ご飯}, \ldots), (\text{冷房}, \ldots))$
  - $y = (\underbrace{(\text{ロングスカート}, \text{パン}, \ldots)}_{\text{個人 1 の状態}}, \underbrace{(\text{パンツ}, \text{ご飯}, \ldots)}_{\text{個人 2 の状態}}, \underbrace{(\text{冷房}, \ldots)}_{\text{共通する状態}})$.

  の x と y からなるペアがある．これらのちがいは個人 1 がミニスカートを履くかロングスカートを履くかだけで，他の人の状態は x，y 間で変わらない．このとき個人 1 の x と y にかんする好みは社会的に認められるべきだろう.
- 法として成文化されていないことがらや規制がない場合が通常はこれにあたる.

- The social welfare function $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ satisfies **Minimal Liberty** [最小限の自由], if

$$\begin{aligned}
&\exists i \in I\ \exists j \in I\ \exists (x, y) \in X^2\ \exists (z, w) \in X^2\ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n \\
&\quad [i \neq j\ \&\ x \neq y\ \&\ z \neq w\ \&\ (x, y) \neq (z, w)\ \& \\
&\quad (xP_iy \to xP_0y)\ \&\ (yP_ix \to yP_0x)\ \& \\
&\quad (zP_jw \to zP_0w)\ \&\ (wP_jz \to wP_0z)].
\end{aligned}$$

  That is, f satisfies Minimal Liberty if there are at least two individuals i and j and two pairs (x, y) and (z, w) of distinct alternatives such that i is decisive [決定的, 決定権をもつ, パワーをもつ] over $\{x, y\}$ and j is decisive over $\{z, w\}$ (each pair taken in either order). [少なくとも 2 人の個人が，それぞれ少なくとも一組の選択肢のペアについて，それらに対する自己の選好順序を社会選好に反映させることができる．]

  - たった 2 人の個人に，少なくとも一組のペアにかんする選択権を要請しているだけ．極めて弱い条件.
  - なぜ 1 人でなく 2 人に選択権を要求しているのか考えよ.

- Minimal Liberty for Everyone がみたされれば，Minimal Liberty はみたされる．いいかえれば，Minimal Liberty がみたされないことをしめせば，Minimal Liberty for Everyone がみたされないことをしめしたことになる.

演習. 個人の集合を $I = \{1, \ldots, n\}$，選択肢の集合を X，X 上の complete で transitive な選好の集合を $\mathcal{R}$ とする．いま，ある固定された社会選好 $R_0 \in \mathcal{R}$ をすべての選好プロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ に対応させる社会厚生関数 f を考える．(つまり f はコンスタントな関数．)
a. f はパレート条件をみたすか?
b. f は Minimal Liberty をみたすか?
c. f はつぎの「条件 1.c」をみたすか:

$$\forall i \in I\ \exists (x, y) \in X^2\ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$$
$$[(x \neq y)\ \&\ (xP_iy \to xP_0y)].$$

演習. いま個人 1 を「独裁者」とする社会厚生関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ を考える．すなわち，すべての選好プロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ にたいして，$R_0 = f(R) = R_1$ となっている．
a. f はパレート条件をみたすか?
b. f は Minimal Liberty をみたすか?
c. f はつぎの「条件 2.c」をみたすか:

$$\exists i \in I\ \exists (x, y) \in X^2\ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$$
$$[(x \neq y)\ \&\ (xP_iy \to xP_0y)\ \&\ (yP_ix \to yP_0x)].$$

演習. 社会厚生関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が「条件 J」をみたすとは:

$$\forall i \in I\ \exists (x, y) \in X^2\ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$$
$$[(x \neq y)\ \&\ (xP_iy \to xP_0y)\ \&\ (yP_ix \to yP_0x)].$$

条件 J の解釈としてもっとも自然なものを，以下から選べ．
セ．すべての個人が選択肢 x を選択肢 y より好めば，社会は x を y より高くランクし，すべての個人が y を x より好めば，社会は y を x より高くランクする．
ン．すべての個人は，少なくとも一組の選択肢のペアについて，それらに対する自己の選好順序を社会的ランク付けに反映させることができる．
タ．すべての個人は，あらゆる選択肢のペアについて，それらに対する自己の選好順序を社会的ランク付けに反映させることができる．
ク．「少なくとも一組の選択肢のペアについて，それらに対する自己の選好順序を社会的ランク付けに反映させることができるような個人」が，少なくとも 2 人存在する．

3.3 センの定理とその証明

Theorem (Impossibility of Minimal Liberty). There is no social welfare function satisfying the Pareto condition and Minimal Liberty.

Corollary. There is no social welfare function satisfying the Pareto condition and Minimal Liberty for Everyone.

Proof (Exercise). Suppose that a social welfare function f is Paretian and satisfies Minimal Liberty. Then there are individuals i, j and pairs (x, y), (z, w), satisfying the conditions. Since $(x, y) \neq (z, w)$, either $x \neq z$ or $y \neq w$. Without loss of generality [一般性を失うことなく], we assume that $y \neq w$.

Case (i). [When $x = z$.] Suppose that a profile $R = (R_1, \ldots, R_n)$ is given so that it satisfies:

$$\begin{aligned} & xP_iyP_iw \\ & yP_jwP_jx \\ \forall k \neq j \quad & xP_kyP_kw \end{aligned}$$

Then

- Since i is decisive over $\{x, y\}$, we have xP_0y.
- Since everbody prefers y to w, we have yP_0w.
- Since j is decisive over $\{z, w\} = \{x, w\}$, we have wP_0x.

By transitivity of P_0 (it is transitive by an earlier Exercise), we have (since xP_0y and yP_0w and wP_0x) that xP_0x. This cannot occur since P_0 is irreflexive (by an earlier Exercise).

Case (ii) [When $x \neq z$.] Later. ∎

Example. Case 1 in the above proof uses the profile that has the same structure as that in *The Lady Chatterley's Lover* example. Let $I = \{A, B\}$ and $X = \{a, b, c\}$, where A is decisive over $\{a, c\}$ and B is decisive over $\{b, c\}$. The profile is given as follows:

$$\begin{aligned} B &: cba \\ A &: bac. \end{aligned}$$

‖

演習. いま，個人の集合が $I = \{1, 2\}$, 選択肢の集合が $X = \{a, b, c\}$ と与えられたとする．このとき次の定理がなりたつ:

定理. 社会厚生関数 f がパレート条件をみたすとする．このとき f はつぎの条件 M をみたさない．

ただし「f が**条件** M をみたす」とは
「(もし aP_1c ならば，aP_0c) で，(もし cP_1a ならば，cP_0a); そして (もし bP_2c ならば，bP_0c) で，(もし cP_2b ならば，cP_0b)」
ということである．

この定理の証明を以下に与える．その証明の空欄 [α]，[β] を埋めるのにもっとも適当なものの組み合わせを選べ．

（証明）f がパレート条件と条件 M をみたすとする．いま選好プロファイル $R = (R_1, R_2)$ を以下のようにとる: cP_1aP_1b かつ aP_2bP_2c.

このとき，パレート条件により [α]，また条件 M により [β] がなりたつ．したがって P_0 の推移性により，cP_0c となる．これはありえない．(証明終わり)

セ．α=「aP_0b」; β=「cP_0a かつ bP_0c」
ン．α=「aP_0b」; β=「aP_0c かつ cP_0b」
パ．α=「cP_0a かつ bP_0c」; β=「aP_0b」
ラ．α=「aP_0c かつ cP_0b」; β=「aP_0b」

3.4 誤った定式化?

センの定理の，Saari [15] による批判を検討する．Saari の論点は以下のようなもの:

- Saari によれば，センの Minimal Liberty は「個人が推移的な選好をもつ」という仮定に逆らうものであるという．Minimal Liberty をみたすルールは，個人の選好が推移的であるかどうか区別できない．そのため個人の選好の推移性が満たされるケースも，そうでないケースも同じようにあつかってしまう．

- ところが個人の推移性が破られるケースで，社会選好が推移性をみたすことを要求するのは無理がある．たとえば全員が同一の循環的 (cyclic) な選好 (たとえば $abca$，つまり $aP_ibP_icP_ia$，など[3]) を持っていたら，パレート条件により，その循環的な選好が社会選好にならなければならない．よって社会選好の推移性は破られてしまう．

- Saari によれば，Sen の定理のしめす不可能性の原因は，Minimal Liberty を満たすルールが個人の選好の推移性を認識できない点にある．

[3]第 3.4 節と第 3.5 節では循環的な選好を $abca$ などと表す．これは aP_ib かつ bP_ic かつ cP_ia を略記したものである．循環的な選好は推移性を満たさないので，たとえば aP_ic とはならないことに注意．

- Saari によれば，センの定理は通常言われるような悲惨な内容を持ったものではない．ただ「社会が合理的な結果を得たければ，その社会は洗練されない不合理な個人選好を想定するルールを避けなければならない」と言っているだけ．

- よってセンの定理の解決には,「合理的な結果を得るには，合理的な個人のためにつくられたルールをもちいなければならない」という点に気をつければいい．

注意．このセクションでは〈選好 (preference)〉という言葉は，選択肢の集合 X 上の任意の 2 項関係を指すものとする．**推移性や完備性を満たさない関係にも〈選好〉ということばを当てはめることにする．**また，そのさい社会厚生関数にあたるもの (個人の選好プロファイルから社会選好への関数) はルール (rule) とよぶことにする．[4]

An important assumption in Sen's theorem is that the preferences of individuals are transitive. (Transitivity of a preference R_i implies it is **acyclic**. That is, its strict part P_i does not have cycles such as $aP_ibP_icP_ia$ or $aP_ibP_icP_idP_ia$.) If everybody has the same cyclic preference, for example, then the Pareto condition dictates a cyclic social preference

Surprisingly, all rules satsfying Minimal Liberty ignore this trasitivity assumption. If a rule can serve only voters (individuals) with transitive preferences (which is true for many of standard voting methods), then it is eliminated by Minimal Liberty.

To see what kind of rules are dismissed [追い払われる，除かれる] by the assumption of Minimal Liberty, consider the proof of Sen's theorem for three alternatives, where individual 1 is decisive over $\{a, b\}$ and individual 2 over $\{a, c\}$. ("irrel" in the table means "irrelevant" [無関係].)

Individual	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$
1	??	??	irrel
2	irrel	??	??
others	irrel	??	irrel

(3.1)

Note that "irrel" slots can be filled in any manner since they are irrelevant. Other slots can be filled in any manner too, without causing any difficulty. This defines the "true" domain (denoted by $\mathsf{Sen}^n(3)$) of profiles for Minimal Liberty rules (rules satisfying Minimal Liberty).

To see that rules satisfying Minimal Liberty are incapable of distinguishing between (i) a transitive profile (profiles consisting of transitive preferences) and (ii) a nontransitive one, note the following:

[4] あくまでも暫定的な措置．このノートの後のバージョンでは適当な用語法を考える．

- When individual 1 has the transitive preference abc and the others have the transitive preference bca:

$$\begin{array}{rcccc} 1 & ab & bc & \text{irrel} \\ 2 & \text{irrel} & bc & ca \\ \text{others} & \text{irrel} & bc & \text{irrel} \end{array} \tag{3.2}$$

- When everybody has the nontransitive preference $abca$: the same table (3.2) just mentioned applies.

By modifying the above argument, one can prove the following:

Proposition.

- Let $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathsf{Sen}^n(3)$ be a profile that belongs to the domain $\mathsf{Sen}^n(3)$ admitted by a Minimal Liberty rule. Then there exists a transitive profile $R^t \in \mathcal{R}^n$ that no Minimal Liberty rule can distinguish from R.

- Conversely [逆に], given a transitive profile $R^t \in \mathcal{R}^n$, there is a nontransitive profile $R \in \mathsf{Sen}^n(3) \setminus \mathcal{R}^n$ that no Minimal Liberty rule can distinguish from R^t. In fact, R can be chosen so that all individuals have cyclic preferences.

Two profiles are equivalent [同等] if they agree on all pairwise comparisons except those noted as "irrel" in Table 3.1. A set consisting of all the profiles equivalent to a certain profile is called an equivalence class. A Minmum Liberty rule cannot distinguish between profiles in the same equivalance class. The above proposition states that each equivalence class has (i) at least one transitive profile and (ii) at least one nontrasitive profile, where every individual has a cyclic preference.

Because of the above proposition, restricting profiles to transitive ones (instead of those in $\mathsf{Sen}^n(3)$) makes no difference. [$\mathsf{Sen}^n(3)$ のプロファイルに対応する社会選好は，どれもある推移性をみたす選好プロファイルに対応している．]

Application to proof construction! [センの定理の証明のポイントは，なにか問題をおこすようなプロファイルを最初に見つけてくることだった．見つけ方のヒントを教える．] In proving propositions, we usually want to construct a cyclic social preference. To do so:

1. Start with a profile $R^c \in \mathsf{Sen}^n(3)$ that results in a cyclic social preference. Example: $abca$ for everybody; with the Pareto condition, the resulting social preference is $abca$.

2. Construct a transitive profile $R^t \in \mathcal{R}^n$ that is indistinguishable (by any Minimal Liberty rule) from R^c. Such a transitive profile exists because of the above proposition. Example: see Table 3.2. [Maybe it is instructive to write down the profile in a new column.]
3. Of course, the social preference resulting from R^t is the same as that resulting from R^c; hence the social preference is cyclic.

センの定理の証明の Case 2 はつぎの Exercise にしめす方法でできる．ここでは Minimal Liberty の条件文にでてくる個人 i と個人 j が個人 1 と個人 2 に，集合 $\{x, y\}$ が $\{a, b\}$ に，集合 $\{z, w\}$ が $\{c, d\}$ に，対応している．

Exercise. There are four alternatives and $n \geq 2$ individuals. (The number of alternatives can be generalized to $k \geq 4$.) Individual 1 is decisive over $\{a, b\}$ and individual 2 over $\{c, d\}$ (so that Minimal Liberty is satisfied).

1. In the following table (which corresponds to Table 3.1), indicate which slots are irrelevant. [The answer is already given here.[5]]

Individual	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{c, d\}$	$\{d, a\}$
1	??	??	irrel	??
2	irrel	??	??	??
others	irrel	??	irrel	??

(3.3)

2. Find a **transitive** profile that (when a Minimal Liberty rule satisfying the Pareto condition is applied) results in a cyclic social preference $abcda$ (i.e., $aP_0bP_0cP_0dP_0a$). [Hint: start from a nontransitive profile and use the table.]

Saari によれば，Sen の Minimal Liberty をみたすルールにふさわしい定義域 (domain) は $\mathsf{Sen}^n(k)$ であるという．課される条件 (ここでは Minimal Liberty) の数学的性質が定義域を決めるのであり，われわれが勝手に決めるわけではない．それを無視して定義域を決めれば不可能性が出てくるのは当たり前だという．

例. 以下の公理を考えよう．

公理 任意の実数 a， b にたいして，実数 c が存在し，$b + c = a$ となる．

この公理は差を定義している: $c = a - b$. かりにわれわれが勝手に a，b，c の属する領域を正の実数の集合 $\mathbf{R}_{++} := \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ にしたとする．す

[5]Note that some pairs, such as $\{a, c\}$ and $\{b, d\}$, are missing in the first row. The "true" domain $\mathsf{Sen}^n(k)$ may require "partial transitivity." For example, if it happens that aP_1b and bP_1c then aP_1c (for the missing pair $\{a, c\}$).

ると当然この公理は満たされない ($b > a > 0$ のとき) ので,「不可能性定理」が簡単にいえてしまう．公理の要求する性質を無視して，領域を勝手に $\mathbf{R}_{++}$ としたのは数学的にナイーブだと Saari はいう．(三原: しかしこの「不可能性定理」は「定義域上に公理をみたす関数が存在しない」という形になっていないのでは．) ‖

Saari によれば，Minimal Liberty をみたすルールの定義域を $\mathcal{R}^n$，つまり transitive and complete なものにするのは，関数 $f(x, y) = 1/(x - 4)$ の定義域を $y = 10$ に制限するようなもの．実質的な制限になっていないだけでなく，$x = 4$ でおこる病理をとりのぞいていない．

リマーク. 社会選択理論でもっとも有名な定理である〈**アローの定理** (Arrow's Theorem)〉は,「パレート条件と独立性の条件 (〈無関係対象からの独立性〉) をみたす社会厚生関数は独裁的である」と主張 (Arrow [2]; 佐伯 [20, 第 II 章] 参照).

- 社会厚生関数が**独裁的** (dictatorial) であるとは，社会選好がつねに特定の個人の選好にしたがうこと: there exists an individual i such that for all pairs (x, y) and for all profiles R, if xP_iy then xP_0y.
- 社会厚生関数が**無関係対象からの独立性** (Independence of Irrelevant Alternatives) をみたすというのは，任意の選択肢のペア (x, y) の社会選好ランキングが「おのおのの個人がそのペアを相対的にどうランクしているか」だけによって決まるということ．
- 無関係対象からの独立性をみたす社会厚生関数を考える．たとえば個人 1 の選好が $abcde$ から $adecb$ にかわり，個人 2 の選好が $acdeb$ から $cdeab$ に変わったとしても，(選択肢 a，b にたいする他の個人のランク付けが変わらないかぎり) (a, b) にたいする社会ランキングは変わらない．

Saari [15] の Section 3 と Section 4 はアローの定理における独立性の条件 (Independence of Irrelevant Alternatives) を議論．独立性をみたすルールの定義域は nontransitive な選好プロファイルを許す． Saari は広く受け入れられている Condorcet winner にも異議を唱えている (p. 251)． ‖

3.5 Saari の解決

Minimal Liberty の問題点は，それが個人の選好の推移性を無視することにあった．個人の選好の推移性がみたされるなら，選択肢は順序づけてならべることができるはず．その順序づけの情報を保持するような条件が必要．

Intensity level (選好の強度) は順序づけの情報を一部保持する:

- ペア (x, y) のランキング xP_iy の Intensity level とは，すべての選択肢を選好順序でならべたときに選択肢 x と選択肢 y のあいだにある選択肢の数.
- たとえば選好 $abcd$ や選好 $cabd$ のもとでの，aP_ib の Intensity level は 0．選好 $acdb$ のもとでの，aP_ib の Intensity level は 2.

リマーク. Saari は無関係対象からの独立性を弱めて，Intensity IIA という条件を提示し，これによりアローの定理の解決を図る:

- 社会厚生関数が**Intensity IIA** をみたすというのは，任意の選択肢のペア (x, y) の社会選好ランキングが,「おのおのの個人がそのペアを相対的にどうランクしているか，**そしてそのランキングの Intensity level はどれだけか**」だけによって決まるということ.
- Intensity IIA をみたす社会厚生関数を考える．たとえば個人 1 の選好が $abcde$ から $adecb$ にかわれば，(a, b) にたいする社会ランキングも変わるかもしれない．aP_1b の Intensitiy level が 0 から 3 に変わったから.
- たとえば個人 1 の選好が $abcde$ から $abedc$ にかわり，個人 2 の選好が $acdeb$ から $adecb$ に変わったとしても，(選択肢 a，b にたいする他の個人のランク付けとその Intensity levels が変わらないかぎり，) (a, b) にたいする社会ランキングは変わらない.
- Saari はパレート条件と Intensity IIA をみたし独裁的でない社会厚生関数が存在することをしめした: たとえば次のボルダ (Borda) 方式.
- **ボルダ方式**: 選択肢の集合 X が k 個の要素を持つとする．このとき各人の選好順序で最下位の選択肢に 0 点，そのひとつ上に 1 点，...，最上位の選択肢に $k-1$ 点を与え，それぞれの選択肢について合計点 (Borda count) を求め，それを比較．(無差別な選択肢がある場合のあつかいについては本節末の演習を参照．)
- 明らかにボルダ方式は無関係対象からの独立性を破る (本節末の演習を参照).

‖

Saari の解決例:

1. Blau (1975) のリバイバル?: (上の〈リマーク〉で無関係対象からの独立性を Intensity IIA という条件に弱めたように)Intensity level の概念をもちいて，Minimal Liberty の条件を弱める.

- どう弱めるのかについて，Saari は明示していない．弱めた条件を定式化することは，(卒業研究などの) **課題**とする．
- 三原の思いつき: 似た発想でセンの定理の解決を図った Blau の解決法は不十分だった．どういう条件のときどの個人の権利を尊重するのか (辞書的配列?) などを決める必要はないか?

2. パレート条件をつぎのように修正する:

Modified Pareto 任意のプロファイル R と任意の選択肢 x, y について，**もし x も y も個人が決定権をもつペアに属しておらず** (if no individual i exists such that i is decisive over $\{x, z\}$ or $\{y, w\}$ for some z, $w \in X$)，そして全員が x を y より好むならば，社会も x を y より高くランクする．

このときつぎが言える:

- パレート条件と Minimal Liberty が (実効をもって) 適用される選択肢が重なっていたのが問題を起こしていた．上の修正は明らかにその重なりを避けた形になっている．
- Modified Pareto のモーチベーション: ある個人が選択肢 $\{x, y\}$ について選択権をもっているとき，どうして社会が x なり y なりを他の選択肢と比較できるか?—弱いと思う．
- センの定理に解決が与えられる: 選択肢が 4 つ以上あるとき，Modified Pareto と Minimal Liberty をみたす社会厚生関数が存在する．
- 両方の条件をみたす社会厚生関数の例: 個人が決定権をもつペアについては，その個人にまかせる．その他の要素だけからなるペアについてはボルダ方式 (おまけ参照) で決める．残りのペア (選択肢のひとつだけが個人が決定権をもつペアに属する) については，推移性が保たれるようにうまく決める．

演習. R を X 上の 2 項関係とする．P を R の asymmetric component，つまり

$$xPy \iff (xRy \ \& \ \neg yRx)$$

によって定義される関係とする．もし R と P が推移的であれば，R が非循環的であることをしめせ．ただし R が**非循環的** (acyclic) というのは，次の条件によって定義される:

$$\forall t \in \mathbf{N} \ \forall x^1 \in X \ \ldots \ \forall x^t \in X \ [(x^1 P x^2 \ \& \ \ldots \ \& \ x^{t-1} P x^t) \longrightarrow \neg x^t P x^1].$$

演習. 完備性と推移性をみたす選好のプロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^n$ が与えられている．このとき任意の個人 $i \in I$ と任意の選択肢 $x \in X$ につい

て，i が x 以上に好まない選択肢の数 $b_i(x) := b_i^R(x) := \#\{y \in X : xP_iy\}$ を決める．(集合 A にたいして，$\#A$ は A の要素の個数を表す．) プロファイル R における x の Borda count とはこの数の合計点 $B^R(x) := \sum_{i=1}^n b_i(x)$ のことである．ボルダ・ルールとは Borda counts によって選択肢を比較する社会厚生関数である (高い得点ほど高いランキング)．すなわち $xR_0y \iff B^R(x) \geq B^R(y)$.

a. ボルダ・ルールはパレート条件を満たすか?

b. ボルダ・ルールは Minimal Liberty を満たすか? [ヒント: 個人が，ある選択肢ペア $\{x, y\}$ について決定権をもつことができるかどうか考えよ．]

c. 選択肢の集合を $X = \{a, b, c, d\}$，個人の集合を $I = \{1, 2, 3\}$ とする．ボルダ・ルールは〈無関係対象からの独立性〉を満たさないことを，以下のプロファイル R と R' を比較することによりしめせ:

$$\begin{array}{ll} R_1 : abcd & R'_1 : abcd \\ R_2 : abcd & R'_2 : abcd \\ R_3 : bacd & R'_3 : bcda \end{array}$$

[ヒント: a と b を比較せよ．]

d. 選択肢の集合を $X = \{a, b, c\}$，個人の集合を $I = \{1, 2\}$ とする．ボルダ・ルールは〈無関係対象からの独立性〉を満たさないことを，以下の条件をみたすプロファイル R と R' とを見つけ，それらを比較することによりしめせ:

1. aP_1b かつ bP_2a かつ aP'_1b かつ bP'_2a.
2. aP_0b かつ bP'_0a.

3.6 文献案内

この章のはじめの部分の参考文献: 佐伯 [20] の IV 章「個人の自由と社会の決定: 自由主義のパラドックスをめぐって」．特に pp. 111-120.

第 3.4 節以降の議論は Saari [15] による．

第4章　権利の譲渡，Gibbard の解決 (仮題)

このノートの将来のバージョンに入れる予定．鈴村 [23, 3.4 節] の説明と大差ないものになるのでは．おそらく次の章の一部に組み込まれることになるだろう．

第5章　社会選択ルール，ゲーム・フォーム，提携のパワー (仮題)

5.1　はじめに

第3章ではセンの定理を社会厚生関数のばあいについてしめした．この章ではセンの定理を**社会選択ルール** (social choice rule; 与えられた選択肢の集合から社会として選ぶべき選択肢を，ひとびとの選好にもとづいて決定する) のばあいについていいかえることから出発し，数理権利論の今後の展開の方向を探る．主な参考文献は Hammond [6].

目標:

1. 個人だけではなく提携 (coalitions; 個人の集合) にも権利を与えることのできるフレームワークを考える．(ある年齢に達した男女からなるペアに与えられた「結婚する権利」や，複数の個人が契約を結ぶ権利など．)
2. Sen の定理を社会選択ルールのばあいについていいかえる．
3. 権利体系の内部整合性の問題を指摘し，ひとつの解決をしめす．
4. 一見対立するつぎの2つの命題のかかわりについて，ヒントを与える: 厚生経済学の第一命題が「個人の権利は社会的な効率性 (パレート効率性) を実現する」ことを主張する一方，センの定理は「個人の権利が効率性と対立する」ことを示唆.

厚生経済学の第一命題 私有財産権の確立された経済の競争均衡配分 x はパレート効率である．つまり全員が x より好むような配分 y は実現不可能である．

Sen の定理（リベラルパラドクス） 次の2つの条件を同時にみたす社会選択ルールは存在しない．

パレート条件 もしある選択肢 x が社会的に選択されるならば，全員が x より好むような選択肢 y は実現不可能である．

最小限の自由 少なくとも2人の個人が何らかの選択肢ペアについての選択権を持つ．

5. 権利論への新しいアプローチである，**ゲーム・フォーム**(メカニズムともよばれる; ゲームのルールを決めたもの) によるアプローチを導入する．提携に与えられたパワーを考えることにより，ゲーム・フォームによるアプローチと社会選択ルールによるアプローチとを比較する．
6. ひとびとが (権利の構造などの) メカニズムについての選好を持つとみなすアプローチを紹介し，そのアプローチへの手がかりを探る．

5.2 フレームワーク

- 個人 (individuals) の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする ($n \geq 2$)．[1]
- 選択肢（alternatives）の集合を X とする．X は少なくとも 3 つの要素を持つとする．
  - 選択肢は社会の状態（social states）である．それぞれの個人やグループが置かれている状況を記述.
- X 上の**選好** (preferences) の集合を $\mathcal{R}$ と書く．
  - $\mathcal{R}$ に属するのは X 上の 2 項関係で，完備性（completeness）と推移性（transitivity）とをみたすものとする．すなわち選好を R と書くとき，次が成り立つ:

    完備性 (completeness) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ [xRy \text{ or } yRx]$.

    推移性 (transitivity) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ \forall z \in X\ [(xRy\ \&\ yRz) \rightarrow xRz]$.
  - 選好 R に対応する**強い選好** (strict preference) を P で，**無差別関係** (indifference) を I で表す (以前と同様)．選好に添え字がつくときも同様.
- X の部分集合で有限（finite）かつ非空（nonempty）のもののあつまりを $\mathcal{F}$ とする．これらの集合は**アジェンダ** (agenda, 機会集合, feasible sets, issues) と考えられる．
  - X は潜在的に可能な選択肢の集合である．アジェンダとはある特定の状況が与えられたときに実現可能な選択肢の集合，あるいはある特定の状況下 (投票など) でひとびとに比較することが求められている選択肢の集合，と考えられる．

[1] 第 3 章とちがい，この章では I ではなく N をもちいる．理由のひとつは Hammond [6] の使っているノーテンション (記号の用法) と揃えるため．もうひとつの理由は I が無差別関係と同じ記号になっていたため．(なぜだれも指摘しなかったの?)

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ とする ($\mathcal{P}$ はある制限された選好の集合; ただし $\mathcal{P} = \mathcal{R}$ でもいい). **社会選択ルール** (social choice rule) とは関数

$$C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$$

であり，おのおののアジェンダ $A \in \mathcal{F}$ とおのおのの選好プロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{P}^N$ にたいして，非空の部分集合 $C(A, R) \subset A$ を対応させる．[2]

  - ここで R は選好プロファイルを指していることに注意.
  - Figure 5.1: three people, four alternatives
  - $C(A, R)$ は，ルール C が人びとの選好を考慮した結果残った A の要素.
  - 社会選択ルールは特定のアジェンダが実現する前に決められている．ひとつのルールであらゆるアジェンダをあつかえるようなっている.

演習. X は 3 つ以上の選択肢からなるとする．$a \in X$ を特定の (固定された) 選択肢とする．関数 $C_a : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ を $C_a(A, R) := \{a\}$ によって定義する．C_a は社会選択ルールか?

演習. 関数 $C_0 : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ を $C_0(A, R) := A$ によって定義する．C_0 は社会選択ルールか?

5.3 社会選択ルールと Sen の定理

5.3.1

まずパレート条件を**社会選択ルールについて**定義する:[3]

定義. 社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ が**パレート条件** (the Pareto condition) をみたすとは:

$$\forall x, y \in X \ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{P}^N$$
$$[(\forall i \in N \ xP_iy) \longrightarrow \forall A \in \mathcal{F} \ (x \in A \to y \notin C(A, R))].$$

[2] ここで $\mathcal{P}^N$ とは N から $\mathcal{P}$ へのすべての関数の集合である．そのような関数は $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ のそれぞれの要素 i に $\mathcal{P}$ の要素である選好 R_i を対応させている．よって $\mathcal{P}^N = \mathcal{P}^n$ とみなせる．なお Hammond [6, p. 58] の $\mathcal{P}^N$ はここでの用法とはちがい，$\mathcal{R}^n$ の任意の部分集合を表している．よって彼のいう "social choice rule" はここでいう社会選択ルールよりも一般的な概念になっている.

[3] 第 3 章では社会厚生関数についてパレート条件を定義した．条件を適用する対象がちがうので，新たに定義し直さなければならない.

That is, if everybody prefers x to y, then y should not be chosen when x is available. [もし全員が x を y より好むならば，x がアジェンダにふくまれているときに y が選ばれることはない．(y が選ばれるならば x はアジェンダにふくまれない．)] [Figure 5.2]

演習. 社会選択ルール $C_0 : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ を $C_0(A, R) := A$ によって定義する．C_0 はパレート条件をみたすか?

5.3.2

権利が提携 (グループ) にたいして与えられたフレームワークを導入する．たとえば 1 人の個人に「結婚する権利」が与えられているというばあい,「相手の意向を無視して結婚できる」という意味 (これは現在ではめずらしい) と,「相手の同意があれば結婚できる」という意味とを区別しなければならない．後者の意味では:

- 個人に結婚する権利が与えられていると見なすばあい，その権利は条件つきのものと考えざるをえない．(「他の人の許可を得れば，タバコを吸ってもいい」の類い．)
- 特定の年齢に達した男女のペアに与えられた権利と見なせば，条件つきの権利であると考える必要はなくなる．
- 「ある権利が 2 人に与えられたとすれば，その 2 人をふくむ任意のグループにその権利が与えられている」という条件が仮定されることがある．これは 3 人が結婚する権利をもつことを意味するのか? そういうわけではない．なぜなら選択肢は「結婚する」とか「しない」とかを抽象的に記述しているわけではなく,「だれとだれが結婚している」とか「していない」とかを具体的に記述しているはずだから．以下で権利は選択肢と選択肢との関係として表現されることに注意．ただし権利論のフレームワークの解釈には，いまのところじゅうぶんな合意があるわけではない．

用語をいくつか導入する:

- **提携** (coalition, group) とはひとびとの集り (グループ) であり，N の部分集合 G のことである．
- G の**権利関係** (rights relation, 権利域) D_G とは X の 2 項関係で irreflexive なものである．つまり $x \neq y$ となるような $(x, y) \in X^2$ の，ある集りである． $(x, y) \in D_G$ となるとき，提携 G が「ペア (x, y) にた

いする権利を持つ」とか,「x をとって y を拒否する権利を持つ」などという．[When $(x, y) \in D_G$, we say that G has rights for x over y.]

- 例: $D_{\{1\}} = \{(a, c), (c, a)\}$ とする．提携 $\{1\}$(つまり個人 1) に与えられた権利を記述する:
  - $(a, c) \in D_{\{1\}}$ は c を拒否して a を選ぶ権利 (a があれば)
  - $(c, a) \in D_{\{1\}}$ は a を拒否して c を選ぶ権利 (c があれば).
- 任意の集合 X 上の任意の 2 項関係 $D \subset X \times X$ について，D が**対称的である** (symmetric) とは:

$$\forall x, y \in X \ [xDy \to yDx].$$

- **定義**: 社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ を考える．$\mathbf{Q} \subset \mathcal{P}^N$ を選好プロファイルからなる集合とする．C が**$\mathbf{Q}$(に属するプロファイル) にたいして権利関係 D_G を尊重する** (respects the rights relation D_G for (the profiles in) $\mathbf{Q}$) とは:[4]

$$\forall x, y \in X \ \forall R \in \mathbf{Q}$$
$$\{[xD_Gy \ \& \ (\forall i \in G \ xP_iy)] \longrightarrow \forall A \in \mathcal{F} \ [x \in A \to y \notin C(A, R)]\}.$$

  That is, if G has rights for x over y and everybody in G prefers x to y (where the preference profile is in $\mathbf{Q}$), then y should not be chosen when x is available. [G が x を y にかえて選ぶ権利があり，しかも ($\mathbf{Q}$ に属しているプロファイルのもとで)G の全員が x を y より好めば，x がアジェンダにはいっているかぎり y が選ばれることはない．Figure 5.3.]

- **定義**: 社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ が**権利関係 D_G を尊重する** (respects the rights relation D_G) とは，C がプロファイル集合 $\mathcal{P}^N$ にたいして D_G を尊重することである．(つまり前出の定義で $\mathbf{Q} = \mathcal{P}^N$ のケース．)
- 権利関係 D_G が非空な提携 G のあつまりを

$$\mathcal{G} = \{G \subset N : \exists (x, y) \in D_G\}$$

  とする．$\mathcal{G}$ は少なくともひとつのペア (x, y) について権利をもつ提携のあつまりである．[5]

[4] Hammond [6, p. 59] の定義を拡張している．

[5] Hammond [6, p. 59] は重複を避けるために，次の仮定を置く (minimal な提携の仮定): if xD_Gy then there is no $G' \subset G$ such that $G' \neq G$ and $xD_{G'}y$. この仮定はこのノートでは必要ないと思う．

- **権利体系** (rights profile, 権利プロファイル, rights system) とはなんらかの権利をもつ提携 $G \in \mathcal{G}$ のそれぞれに与えられた権利関係 D_G をリストしたもの $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$ である．(たとえば $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_k\}$ とすれば，$D^{\mathcal{G}} = \{D_{G_1}, \ldots, D_{G_k}\}$ と書ける．)

- **定義**: 社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ が(**プロファイル集合** $\mathbf{Q} \subset \mathcal{P}^N$ **にたいして**) **権利体系** $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$ **を尊重する** (respects the rights profile $D^{\mathcal{G}}$ for $\mathbf{Q}$) とは，権利をもつすべての提携 $G \in \mathcal{G}$ にたいして，社会選択ルール C が ($\mathbf{Q}$ にたいして) 権利関係 D_G を尊重することである．

5.3.3

社会選択ルールにたいするセンの定理は以下のようになる:

最小限の自由にかんする Sen の定理．権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ において，すくなくとも 2 人の個人 i, j が非空で対称的な権利関係をもっているとする．(つまり $\{i\}$, $\{j\} \in \mathcal{G}$; そして xD_Gy ならばいつも yD_Gx となる．) このとき，パレート条件をみたし $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{R}^N \to \mathcal{F}$ は存在しない．(社会選択ルールの定義域は制限されていないことに注意．つまり $\mathcal{P} = \mathcal{R}$．)

証明 (これをマスターすることを**演習**とする)．We prove the theorem only for the case $N = \{1, 2\}$ and $X = \{a, b, c\}$. [Compare with *The Lady Chatterley's Lover* case.]

Since $D_{\{1\}}$ and $D_{\{2\}}$ are nonempty, there are pairs $(x, y) \in D_{\{1\}}$ and $(z, w) \in D_{\{2\}}$. Without loss of generality, assume that $(a, c) \in D_{\{1\}}$ and $(c, b) \in D_{\{2\}}$. (*Details*: Since there are only three alternatives, $\{x, y\}$ and $\{z, w\}$ have exactly *one element in common*. (An Exercise below shows that when there are two elements in common, C cannnot respect the rights profile $D^{\mathcal{G}}$.) Without loss of genarality, assume that c is the overlapping alternative and $(a, c) \in D_{\{1\}}$. Then $(b, c) \in D_{\{2\}}$. By symmetry of $D_{\{2\}}$, we have $(c, b) \in D_{\{2\}}$.)

Suppose that a social choice rule C satisfies the conditions. Suppose that a profile R is given as follows: bP_1aP_1c and cP_2bP_2a.

- The Pareto condition implies that (since everybody prefers b to a), a should not be chosen from the agenda X, where $b \in X$ is available. (So, $a \notin C(X, R)$.)

- Since $(a, c) \in D_{\{1\}}$ and aP_1c, c should not be chosen from X, where a is available. (So, $c \notin C(X, R)$.)

- Since $(c, b) \in D_{\{2\}}$ and cP_2b, b should not be chosen from X, where c is available. (So, $b \notin C(X, R)$.)

It follows that $C(X, R) = \emptyset$, which is a contradiction. ∎

演習. $\{x, y\}$ と $\{z, w\}$ が共通要素を**2 つ**持つケースについて，上の証明を完成させよ．一般性を失うことなく $x = z$, $y = w$ としてよい．

演習. 上の定理で,「すくなくとも 2 人の**個人**i, j が非空で対称的な権利関係をもっているとする」という仮定を「すくなくとも 2 つの非空な**提携**G, G' で重ならないもの (共通部分をもたない: $G \cap G' = \emptyset$) が，非空で対称的な権利関係をもっているとする」と書きかえても，結論は変わらないことをチェックせよ．

演習. 次の定理を証明せよ (この証明は，$\{x, y\}$ と $\{z, w\}$ が共通要素を持たないケースについて，Sen の定理の証明を完成させることになる): 権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ において，すくなくとも 2 人の個人 i, j が非空な権利関係 (**対称的である必要はない**) をもっており，それぞれの権利関係に属するペア $(x, y) \in D_{\{i\}}$ と $(z, w) \in D_{\{j\}}$ で，重ならない ($\{x, y\} \cap \{z, w\} = \emptyset$) ものがあるとする．このとき，パレート条件をみたし $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{R}^N \to \mathcal{F}$ は存在しない．[ヒント: $\{x, y, z, w\}$ 上に制限されたプロファイルで，社会選好がサイクルを持つようなものを考えよ．Section 3.4 (「誤った定式化?」) の Exercise 参照．]

5.4 Gibbard のパラドックス: 権利体系の内部整合性

5.4.1

社会選択ルールが与えられたとき，以下のように社会選好を導ける．

定義. 社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ と選好プロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{P}^N$ とが与えられたとき，それに対応する**顕示強選好** (revealed strict preference) P^C をつぎのように定義する: 任意の $x, y \in X$ について，

$$xP^Cy \iff \forall A \in \mathcal{F}\ [x \in A \to y \notin C(A, R)].$$

C のもとで「x が y より社会的に好まれる」というのは,「x がアジェンダにふくまれるときはいつも y が選ばれない」ということとみなしている．

リマーク. 顕示強選好の概念を使えば,「社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ がプロファイル集合 $\mathbf{Q} \subset \mathcal{P}^N$ にたいして権利関係 D_G を尊重する」ことを以下のように書きかえることができる:

$$\forall x, y \in X \ \forall R \in \mathbf{Q} \ \{[xD_G y \ \& \ (\forall i \in G \ xP_i y)] \longrightarrow xP^C y]\}. \tag{5.1}$$

‖

(パレート条件を課さなくてもすでに) 権利体系自体が整合性を持たないことがある:

例. 〈**シャツの色合わせ** (matching shirts)〉の例. (佐伯の本 [20] では〈屋根の色のあらそい〉.) $N = \{1, 2\}$, $X = \{bb, bw, wb, ww\}$ (たとえば bw は個人 1 がブルーのシャツ, 個人 2 がホワイトのシャツを着た状態[6]). 個人 1 は個人 2 とちがう色を望み, 個人 2 は個人 1 と同じ色を望む:

$$\begin{array}{ll} bwP_1ww & wbP_1bb \\ wwP_2wb & bbP_2bw \end{array}$$

権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle G_{\{1\}}, G_{\{2\}} \rangle$ では, それぞれの個人が自分のシャツの色を決めていいことになっているとする: (bw, ww), (wb, bb), (ww, bw), $(bb, wb) \in D_{\{1\}}$ など.

もし社会選択ルール C が権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ を尊重するなら, それに対応する社会選好は以下のサイクルを持つ:

$$bwP^C wwP^C wbP^C bbP^C bw.$$

たとえば $bwP^C ww$ となるのは, 個人 1 の権利と選好からいえる: $(bw, ww) \in D_{\{1\}}$ かつ bwP_1ww である. C は権利関係 $D_{\{1\}}$ を尊重するので, 条件 (5.1) から, $bwP^C ww$ となる. 残りの部分については**演習**.

パレート条件を仮定することなしに, サイクルの存在がいえた. よって権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ が整合性をもっていないといえる.

[Figure 5.4: a game form representing the rights relations; the loops.] ‖

リマーク. 権利を持つグループ $\mathcal{G}$ が個人からなるもの $\{i\}$ だけで (つまり個人のみが権利を持ち), 選好が制限されていない (つまり $\mathcal{P} = \mathcal{R}$) ケースについて, Suzumura [18, pp. 193–4] は以下の 2 つが同値であることをしめした:

1. 社会選択ルールが権利関係 $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する
2. $D^{\mathcal{G}}$ が「臨界的ループ」をふくまない.

[6] それぞれの選択肢が 2 文字で表されていることに注意.

ここで「臨界的ループ (critical loop)」というのは Figure 5.4 で図示したような，権利関係たちによるサイクルのこと． ‖

上の例の権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ はループを持つ．よって (Suzumura の定理により)，$D^{\mathcal{G}}$ を尊重する社会選択ルールを得るためには，選好を制限しなければならない．

[次の例に進む前に第 5.4.2 節を参照して,〈支配戦略〉という概念を理解するのが望ましい．]

例. 上の例では個人 1 の (個人 2 も）自分のシャツの色 (b or w) にたいする好みは他人の選択に依存．この種の依存を許さないとする．つまり，b または w が**支配的** (dominant) であるとする．

たとえば以下の選好プロファイルを考える:

$$R_1 : bw, ww, bb, wb$$
$$R_2 : wb, ww, bb, bw$$

[Figure 5.5: game form with arrows representing preferences.] たしかにそれぞれの個人について b が支配戦略．しかしパレート条件と権利体系の一貫性がない．(パレート条件をみたし $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する社会選択ルールに対応する顕示社会選好はサイクルを持つ.）[Figure 5.6] ‖

この例では，個人 1 は「個人 2 が w を着ること」を「個人 2 が b を着ること」よりも望んでいる．$D^{\mathcal{G}}$ を尊重する社会選択ルールを得るために，選好をさらに制限してみる．

定義. 権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$ が与えられたとき，個人 $i \in N$ の**無権利関係** (no-rights relation, 他人権利関係)E_i を以下で定義する: 任意の x, $y \in X$ について,

$$xE_iy \iff \exists G \in \mathcal{G}\ [i \notin G\ \&\ xD_Gy].$$

個人 i をふくまないあるグループが (x, y) にかんする権利をもつということ．よってこの権利体系を尊重する社会選択ルールが存在すれば，i は (y, x) にかんする権利を持たない (次の演習参照)．[7]

演習. 2 つの交わらない (つまり $G \cap G' = \emptyset$) 非空なグループ G, G' がある．xD_Gy, $xD_{G'}y$ で $D_{G'}$ が対称的であるとする．このとき，社会選択ルール C が権利関係 D_G を尊重すれば，C は $D_{G'}$ を尊重しないことをしめせ．

[7] よって「無権利関係」とよぶからには，上の式の右辺は xE_iy ではなく yE_ix を定義していると考えたほうが自然かもしれない.「他人権利関係」とよべばこの問題はなくなる．

定義. 個人 i の任意の選好 $R_i \in \mathcal{R}$ が権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ のもとで**私的志向をもつ** (privately oriented) とは:

$$\forall x, y \in X \ [xE_iy \to xI_iy].$$

If i has no right over (x, y) (that is, if some group not including i has a right over (x, y)), then i should be indifferent between x and y. (i があるペアについて権利をもたなければ，そのペアに対しては無差別でなければならない．) [Figure 5.7]

演習. 以下にしめした個人 1 の選好は私的志向を持つか:

$$bbI_1bwP_1wbI_1ww.$$

[Figure 5.8]
答．Yes.

演習. 前出の例の個人の選好は私的志向を持たないことをチェックせよ.

定理を述べる前に，まずパレート条件を強めておく:

定義. 社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ が**強いパレート条件** (the strict Pareto condition) をみたすとは:

$$\forall x, y \in X \ \forall R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{P}^N$$
$$\{[(\forall i \in N \ xR_iy) \ \& \ (\exists j \in N \ xP_jy)] \longrightarrow \forall A \in \mathcal{F} \ (x \in A \to y \notin C(A, R))\}.$$

That is, if everybody likes x at least as much as y and somebody prefers x to y, then y should not be chosen when x is available. [もし**全員が** x **を** y **以上に好み，だれかが** x **を** y **よりも好むなら**，x がアジェンダにふくまれているときに y が選ばれることはない]

リマーク. 条件のなかで，前提となっている部分に注目する．以前の定義にあった $\forall i \in N \ xP_iy$ は，全員が x を y **よりも**好むことを要求．これがみたされるとき,「x **は** y **にたいして強い意味でパレート優位である** (x strictly Pareto dominates y)」という.

ここでは全員が x を y **以上に**好めばいいとしたいところ．しかしそれだけでは全員が x と y に無差別なケースを許してしまうので，最低でもだれかひとりは x を y より好むとする．定義にある $[(\forall i \in N \ xR_iy) \ \& \ (\exists j \in N \ xP_jy)]$ がみたされるとき,「x **は** y **にたいして弱い意味でパレート優位である** (x weakly Pareto dominates y)」という． ‖

演習. 社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ が強いパレート条件をみたせば，C はパレート条件をみたすことをしめせ．

つぎの定理は，センの定理と対照的．選好が私的志向をもっていれば，パレート条件と権利の尊重は対立しない．この定理と厚生経済学の第一命題とを比較するのは**課題**とする．

定理. (Hammond [6, Theorem 1]) プロファイル集合 $\mathbf{Q} \subset \mathcal{P}^N$ に属する選好プロファイルにおいて，すべての個人の選好が権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ のもとで私的志向をもつとする．もし社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ が強いパレート条件をみたせば，C は $\mathbf{Q}$ にたいして $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する．

Proof (Exercise). Suppose that for any profile in $\mathbf{Q}$, each individual has a preference that is privately oriented. Suppose also that C satisfies the strict Pareto condition.

To show that C respects $D^{\mathcal{G}}$ for $\mathbf{Q}$, suppose that xD_Gy and xP_iy for all $i \in G$, for a profile $R \in \mathbf{Q}$. [We want: xP^Cy. See the redefinition (5.1) of a rule respecting a rights profile.]

Let $j \notin G$. Then, since xD_Gy, it follows that xE_jy by the definition of no-rights relation. This implies, since R_j is privately oriented, that xI_jy; hence xR_jy.

We now have obtained that

- if $i \in G$, then xP_iy; and
- if $i \notin G$, then xR_iy.

Hence x weakly Pareto dominates y. Since C satisfies the strict Pareto condition, it follows that xP^Cy. (Note that xP^Cy is equivalent to the expression $\forall A \in \mathcal{F}\ (x \in A \to y \notin C(A, R))$.) This is what we wanted to prove. ∎

5.4.2 非協力ゲーム理論の予備知識

ここで厳密さを求める読者のために，**非協力ゲーム理論** (noncooperative game theory) のフレームワークを導入しておく．このノート (1999 年現在のバージョン) のためには「戦略形ゲーム」と「最適反応」と「支配戦略」と「ゲーム・フォーム」の概念を理解しておく必要がある．

第 1.1.2 節であげた**囚人のジレンマ** (The Prisoner's Dilemma) とそのときに導入した用語を思い出して欲しい．

		囚人 2	
		黙秘	自白
囚人 1	黙秘	$-1,-1$	$-9,0$
	自白	$0,-9$	$-6,-6$

戦略形ゲーム (strategic game) とは以下の要素からなる組 $(S_1,\ldots,S_n;u_1,\ldots,u_n)$ である:

- 集合 $N=\{1,\ldots,n\}$ (**プレーヤー** (players) の集合)
- それぞれのプレーヤー i について，集合 S_i (プレーヤー i の**戦略集合** (set of strategies))
- それぞれのプレーヤー i について，実数値関数 $u_i : S_1\times\cdots\times S_n\to\mathbf{R}$ (プレーヤー i の**効用関数** (utility function)，あるいは**利得関数** (payoff function)). [8]

戦略の組 (戦略プロファイル) $(s_1,\ldots,s_n)$ が選ばれたときのプレーヤー i の利得は $u_i(s_1,\ldots,s_n)$ になる．利得関数の代わりに，戦略集合 $S_1\times\cdots\times S_n$ 上で定義された選好を考えることもある．

例. 囚人のジレンマでは，戦略集合が $S_1=S_2=\{\langle\text{黙秘}\rangle,\langle\text{自白}\rangle\}$．利得関数は上記の利得行列で表されており，たとえば $u_1(\langle\text{黙秘}\rangle,\langle\text{自白}\rangle)=-9$ で，$u_2(\langle\text{黙秘}\rangle,\langle\text{自白}\rangle)=0$. ‖

リマーク. 2 人のプレーヤーからなる戦略形ゲームは利得行列で表せた．いま利得行列のそれぞれの枡目 (エントリー) に，その枡目に対応する戦略ペアが取られたときの (利得ペアのかわりに) 結果 (アウトカム) を記入する．こうやって得られる表を**ゲーム・フォーム** (ゲーム形式, game form) とか**メカニズム** (mechanism) とよぶ．たとえば 2 車線道路の特定地点での対向車の運命は以下のゲーム・フォームで与えられる:

		ドライバー 2	
		左側	右側
ドライバー 1	左側	無事	衝突
	右側	衝突	無事

ゲーム・フォームの定義はあとで. ‖

囚人のジレンマでは，囚人 1 にとって〈自白〉が**支配戦略** (dominant strategy): (囚人 2 の戦略がなんであっても) 囚人 1 は〈自白〉という戦略を選ぶのが有利になっている．囚人 2 にとっても〈自白〉が支配戦略になっている．

[8] 集合 $S_1\times\cdots\times S_n:=\{(s_1,\ldots,s_n):s_1\in S_1,\ldots,s_n\in S_n\}$ を集合 $S_1,\ldots,S_n$ の**直積** (direct product) とよぶ．この集合の要素 $(s_1,\ldots,s_n)$ を**戦略プロファイル** (strategy profile) とよぶ.

ノーテーション (記号): i 以外のプレーヤーの戦略集合の直積 $S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n)$ を S_{-i}，その要素を s_{-i} などと書く．たとえば 4 人のばあい，$s_{-2} = (s_1, s_3, s_4)$，$(s_2', s_{-2}) = (s_1, s_2', s_3, s_4)$，$s_{-4}^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*)$.

定義. 戦略形ゲーム $(S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n)$ とプレーヤー i が与えられているとする．次の不等式群がみたされるとき，戦略 $s_i \in S_i$ が戦略 $s_i' \in S_i$ を**強く支配する** (strictly dominates) という: すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ にたいして，

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}).$$

戦略 $s_i \in S_i$ が個人 i の**支配戦略** (dominant strategy) であるとは，s_i が s_i 以外のすべての戦略 $s_i' \in S_i$ を強く支配していることをいう．[文献によって少々条件がちがう．]

リマーク. 2 人ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ のばあい，プレーヤー 1 の戦略 $s_1' \in S_1$ がプレーヤー 1 の戦略 $s_1'' \in S_1$ を強く支配するのはつぎの条件がみたされるとき: プレーヤー 2 のすべての戦略 $s_2 \in S_2$ にたいして，

$$u_1(s_1', s_2) > u_1(s_1'', s_2).$$

たとえば，囚人のジレンマではプレーヤー 1 の〈自白〉がプレーヤー 1 の〈黙秘〉を強く支配:

$$u_1(\langle\text{自白}\rangle, \langle\text{黙秘}\rangle) > u_1(\langle\text{黙秘}\rangle, \langle\text{黙秘}\rangle)$$
$$u_1(\langle\text{自白}\rangle, \langle\text{自白}\rangle) > u_1(\langle\text{黙秘}\rangle, \langle\text{自白}\rangle)$$

‖

例. つぎのゲーム (男女の闘い; Battle of the Sexes; Bach or Stravinsky) ではいずれのプレーヤーも支配戦略を持たない (**演習**: 説明せよ):

		ふみ	
		Bach	Stravinsky
いちろう	Bach	$2, 1$	$0, 0$
	Stravinsky	$0, 0$	$1, 2$

- ふみが〈Bach〉という戦略を選んだとき，いちろうの利得を最大にする戦略は〈Bach〉になっている．(「ふみの〈Bach〉という戦略にたいするいちろうの**最適反応** (best response) は〈Bach〉である」という．)
- 逆に，いちろうが〈Bach〉という戦略を選んだとき，ふみの利得を最大にする戦略は〈Bach〉になっている．

- 戦略のペア (s, s') がたがいに相手の戦略にたいする最適反応からなっているとき (つまり s は s' にたいする最適反応，s' は s にたいする最適反応)，そのペアを**ナッシュ均衡** (Nash Equilibrium) とよぶ.「おたがいがナッシュ均衡を構成する戦略をとっているかぎり，どちらもそのペアを離れる誘因はない」という意味で，安定したペアである.
- 〈Bach, Bach〉はこのゲームのナッシュ均衡である.
- 〈Stravinsky, Stravinsky〉もナッシュ均衡である.
- これら以外にナッシュ均衡はない.

‖

定義. 戦略形ゲーム $(S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n)$ が与えられているとする．プレーヤー i の戦略 $s_i \in S_i$ が他のプレーヤーのとる戦略 $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ にたいする**最適反応** (best response) であるとは，すべての $s'_i \in S_i$ にたいして，

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

であること.

リマーク. 2 人ゲーム $(S_1, S_2; u_1, u_2)$ のばあい，プレーヤー 1 の戦略 $s'_1 \in S_1$ がプレーヤー 2 の戦略 $s_2 \in S_2$ にたいする最適反応であるとは，すべての $s''_1 \in S_1$ について，

$$u_1(s'_1, s_2) \geq u_1(s''_1, s_2)$$

となること． ‖

演習. Battle of the Sexes で，ふみの〈Bach〉にたいするいちろうの**最適反応** (best response) は〈Bach〉であることをチェックせよ.

定義. 戦略プロファイル $s^* = (s^*_1, \ldots, s^*_n)$ が**ナッシュ均衡** (Nash Equilibrium) であるとは，おのおののプレーヤー i について，戦略 s^*_i が他のプレーヤーのとる戦略 $s*_{-i} = (s^*_1, \ldots, s^*_{i-1}, s^*_{i+1}, \ldots, s^*_n)$ への最適反応となっていること.

演習. 囚人のジレンマを考える．囚人 2 の戦略〈黙秘〉にたいする囚人 1 の最適反応はなにか? 囚人 2 の戦略〈自白〉にたいする囚人 1 の最適反応はなにか? このゲームにナッシュ均衡は存在するか? 存在するならすべて列挙せよ.

プレーヤー i の**支配戦略**は，他のプレーヤーのとることのできる**あらゆる**戦略 $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ にたいする最適反応になる.

5.5 ゲーム・フォームによるアプローチ

Nozick [11, 12] をはじめとする自由主義者の多くが，権利論の社会選択ルール (あるいは社会厚生関数）による定式化を批判した.「社会は個人的な問題に順序づけをしたり，個人的な問題を決定したりするものではない」と彼らは主張した．個人の問題は個人で決定すべきだというわけである.

この批判を受けて，社会選択ルールにかわってゲーム・フォームをもちいて個人の権利を定式化するアプローチがとられるようになった: それぞれのアジェンダ $A \in \mathcal{F}$ にたいして，**ゲーム・フォーム** (game form) $\Gamma_A = (S_A, g_A)$ が定められているとする．ただし

- $S_A := \prod_{i \in N} S_{iA} := S_{1A} \times \cdots \times S_{nA}$
- S_{iA} は個人 i の戦略集合 (個人 i のとれる戦略の範囲を定める)
- アウトカム関数 (outcome function) $g_A : S_A \to A$ は，戦略プロファイル $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S_A$ をアウトカム (選択肢) $g_A(s) \in A$ に移す関数.

コメント:

- アジェンダが決まれば，そのときにプレーされるべきゲーム・フォームが決まる．ゲーム・フォームはひとりひとりの個人のとれる戦略の範囲を定めると同時に，とられた戦略の組み合わせのおのおのについて，そのとき実現する選択肢を定めている．ゲーム・フォームはいわば「ゲームのルール」である.
- ゲーム・フォーム・アプローチによる初期の文献 (鈴村 [24] など) では,「個人 i の権利はその個人が戦略集合 S_{iA} のどの戦略もとれることによって保証されている」としているものが多い: 「この意味における自由尊重主義的な権利は，社会の状態に対する個人の選好とは全く独立である.」「この理論では権利構造の《内部整合性》の問題は発生しない.」だれがどういう選択肢を実現できるかとか，実現する選択肢が望ましいか，などは権利とは直接関係ないとされているようだ.
- 次に導入する「自由尊重型ゲーム・フォーム」の概念はこれらの文献よりも一歩進んで,「だれがどういう選択肢を実現するパワーをもつか」に注目している.

定義. 権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$ とアジェンダ $A \subset X$ が与えられている．ゲーム・フォーム $\Gamma_A = (S_A, g_A)$ が $D^{\mathcal{G}}$ にたいして**自由尊重型** (libertarian)(自由尊重 β 型とも）であるというのは:

$$\forall x, y \in A \ \forall G \in \mathcal{G} \ \{x D_G y \longrightarrow \\ \forall s \in S_A \ [y = g_A(s) \to \exists s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA} \ (x = g_A(s'_G, s_{-G}))]\}.$$

[$s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA}$ は G に属する個人の戦略の列で $s_{-G} \in \prod_{i \notin G} S_{iA}$ は G に属さない個人の戦略の列．たとえば $N = \{1,2,3,4\}$ で $G = \{1,4\}$ のとき，$s'_G = (s'_1, s'_4) \in S_{1A} \times S_{4A}$，$s_{-G} = (s_2, s_3) \in S_{2A} \times S_{3A}$，$(s'_G, s_{-G}) = (s'_1, s_2, s_3, s'_4)$．もちろん $s = (s_G, s_{-G})$ と書ける．] That is, whenever xD_Gy, the group G has the power to change the outcome from $y = g_A(s) = g_A(s_G, s_{-G})$ to $x = g_A(s'_G, s_{-G})$, no matter what strategies s_{-G} may be chosen by the individuals outside the group. [xD_Gy で，いま選択肢 $y = g_A(s_G, s_{-G})$ が選ばれているとする．そのとき提携 G は戦略 s'_G をうまく選ぶことによって，y を拒否して $x = g_A(s'_G, s_{-G})$ を実現するパワーをもつ．]

- 「ゲーム・フォームが権利体系にたいして自由尊重型である」の定義に，選好は無関係である．仮に xD_Gy ですべての $i \in G$ について xP_iy であったとき $x \in A$ があったのに y が選ばれたとする．これは権利が侵害されたことを意味するわけではない．なぜなら，G は y を x に変えるパワーは持っていたかもしれないので．(もしゲーム・フォームが自由尊重型ならば，G はそのようなパワーを持っている．) 期待が裏切られることや自由な選択によるミスは権利の侵害とは異なる．

演習. ゲーム・フォーム (S_A, g_A) が $D^{\mathcal{G}}$ にたいして**自由尊重 α 型** (α-libertarian) であるとは次のように定義される:

$$\forall x, y \in A\ \forall G \in \mathcal{G}\ \{xD_Gy \longrightarrow \exists s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA}\ \forall s \in S_A\ [y = g_A(s) \to x = g_A(s'_G, s_{-G})]\}.$$

ゲーム・フォームが自由尊重 β 型であることと，自由尊重 α 型であることとのちがいを説明せよ．どちらかの条件がもう一方の条件を含意するか?

演習. $N = \{1,2\}$ で $A = \{a,b,c\}$ とする．権利体系 $D^{\mathcal{G}} = \langle D_{\{1\}}, D_{\{2\}} \rangle$ が $(b,c), (c,b) \in D_{\{2\}}$ をみたすとする．いまゲーム・フォーム (S_A, g_A) が以下の表で与えられている:

		Player 2	
		0	1
Player 1	0	c	b
	1	a	b

このとき (S_A, g_A) は $D^{\mathcal{G}}$ にたいして自由尊重型になっているか?

定義. 選好プロファイル $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{R}^N$ とアジェンダ A とが与えられている．戦略プロファイル $s \in S_A$ がゲーム (S_A, g_A, R) (ゲーム・フォー

ム (S_A, g_A) と選好プロファイル R との組み合わせ) の**$\mathcal{G}$-強均衡** ($\mathcal{G}$-strong equilibrium) であるとは: 以下をみたす提携 $G \in \mathcal{G}$ とその戦略 $s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA}$ とが同時に存在することがない:[9]

$$\forall i \in G \ [g_A(s'_G, s_{-G}) P_i g_A(s_G, s_{-G})]. \tag{5.2}$$

A strategy profile s is a $\mathcal{G}$-strong equilibrium of (S_A, g_A, R) if for each coalition $G \in \mathcal{G}$, its strategy s_G is an efficient response to s_{-G}. あるグループ G が自分たちの戦略 s'_G を選んで s を離れても，自分たち全員の状態を改善することはできない.

定理. (Hammond [6, Theorem 4]) 権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ が与えられている．任意のアジェンダ $A \subset X$ について，ゲーム・フォーム (S_A, g_A) が $D^{\mathcal{G}}$ にたいして自由尊重型であるとする．このとき社会選択ルール $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ が (すべてのアジェンダ $A \subset X$ とすべての選好プロファイル $R \in \mathcal{P}^N$ にたいして) 条件[10]

$$\emptyset \neq C(A, R) \subset \bigcup_{s \text{ は } (S_A, g_A, R) \text{ の } \mathcal{G}\text{-強均衡}} \{g_A(s)\} \tag{5.3}$$

をみたすならば，C は権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ を尊重する．[Figure 5.9: the triangle with vertices $\mathcal{P}^N$, A, S_A; inclusion is indicated]

- 条件 (5.3) は
  1. ルール C に選ばれるどの選択肢も $\mathcal{G}$-強均衡 (に対応する) アウトカムであること，つまり権利をもついかなる提携もそれを離れて自分たち全員の状態を改善することはできないこと，を要求;
  2. 「$\mathcal{G}$-強均衡アウトカムはかならず C によって選ばれる場合がなければならない」と要求しているわけではない.
- この定理は，自由尊重型のゲーム・フォームにたいする強均衡アウトカムから選択肢を選ぶどんな社会選択ルールも，権利体系を尊重することを主張.
- この定理から,「同じ権利体系にかんするかぎり，自由尊重型のゲーム・フォームのほうが，その権利体系を尊重する社会選択ルールよりも一般的である」とはいえないことが分かる．大雑把にいえば，ゲーム・フォームで尊重できる権利は，社会選択ルールでも尊重できるということ.

[9] 式は G に属するすべてのメンバー i が選択肢 $g_A(s'_G, s_{-G})$ を選択肢 $g_A(s_G, s_{-G})$ よりも好むことを表す．選択肢をしめす式がやや長いので注意.

[10] 条件 (5.3) がみたされるとき，ゲーム (S_A, g_A, R) の $\mathcal{G}$-強均衡が存在することに注意.

Proof (Exercise). Suppose that the game form (S_A, g_A) is libertarian with respect to the rights profile $D^{\mathcal{G}}$. Suppose that a social choice rule $C : \mathcal{F} \times \mathcal{P}^N \to \mathcal{F}$ satisfies the condition (5.3) but it does not respect the rights profile $D^{\mathcal{G}}$. We will derive a contradiction.

Since C does not respect $D^{\mathcal{G}}$, there exists a coailtion $G \in \mathcal{G}$ such that C does not respect the rights relation D_G. Thus there exist alternatives x, $y \in X$ and a preference profile $R \in \mathcal{P}^N$ such that xD_Gy and xP_iy for all $i \in G$, but for some agenda $A \in \mathcal{F}$, $x \in A$ and $y \in C(A, R)$.

Since $y \in C(A, R)$ and

$$C(A, R) \subset \bigcup_{s \text{ is } \mathcal{G}\text{-strong}} \{g_A(s)\}$$

by condition (5.3), it follows that $y = g_A(s)$ for some $\mathcal{G}$-strong equilibrium $s = (s_G, s_{-G}) \in S_A$. [*Details.* $y \in C(A, R)$ and $C(A, R) \subset \bigcup_s \{g_A(s)\}$ imply that $y \in \bigcup_s \{g_A(s)\}$. Then $y \in \{g_A(s)\}$ for some $\mathcal{G}$-strong equilibrium s. Then $y = g_A(s)$.]

Since the game form (S_A, g_A) is liberatarian with respect to $D^{\mathcal{G}} = \langle D_G \rangle_{G \in \mathcal{G}}$ and xD_Gy and $y = g_A(s)$, there exists a list $s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA}$ of strategies such that $x = g_A(s'_G, s_{-G})$. Since xP_iy for all $i \in G$, we have (by rewriting x and y) that

$$\forall i \in G \; [g_A(s'_G, s_{-G}) P_i g_A(s_G, s_{-G})].$$

This means that s is not a $\mathcal{G}$-strong equilibrium (see condition (5.2) in the definition of a $\mathcal{G}$-strong equilibrium)—a contradiction. ∎

5.6 拡張された選択肢

- 社会選択ルールによるアプローチ (「権利体系の尊重」) も，ゲーム・フォームによるアプローチ (「権利体系にたいして自由尊重型」) も，権利を**絶対的な**ものとしてあつかっていた.

- これまでの結果から分かるように，すべての個人や提携の権利を尊重するのは困難である．どの権利を尊重しどの権利を侵害するのか，選択する必要がある.

- もしひとびとが，権利のすべてを実行できる機会を持つことよりも，よい結果 (選択肢) の実現を望むなら (そしてそれらの権利のいくつかを実行することが悪い結果につながるなら)，権利を**相対的な**ものとしてあつかえるアプローチが有力になってくる: たとえば選択肢のなかに権利の割当てを取り込む (権利の割当て自体を個人選好や社会選択の対象とする) アプローチ.

- 選択肢に権利の割当てを取り込む方法はいくつかある．たとえば Pattanaik and Suzumura (1992) は，ゲーム・フォームによって権利の割当てを記述する: ひとびとは社会状態 (選択肢) $x \in X$ とメカニズム (ゲーム・フォーム，権利の割当て) Γ からなる，**拡張された選択肢**(x, Γ) を比較．たとえば $(x, \Gamma) Q_i (x', \Gamma')$ と書いて,「個人 i は，メカニズム Γ によって社会状態 x が実現することをメカニズム Γ' によって社会状態 x' が実現することより選好する」と解釈．ひとびとは「どういう結果が実現したか」だけでなく「その結果が**どのように**実現したか (中央集権的に実現したのか分権的に実現したのか?)」にも関心があるはず．手続きあるいはメカニズムへの関心を明示的に導入.

- しかしメカニズム (ゲーム・フォーム) 自体を比較するのは，戦略の名付け方などあまり重要でない点に注意を払いすぎている．権利の割当てに注目したアプローチを工夫すべき.

Hammond [6] は，ゲーム・フォームを比較する基準として，それによって導かれる権利体系をもちちいることを提唱．[11]

定義. アジェンダ $A \in \mathcal{F}$ とゲーム・フォーム $\Gamma_A = (S_A, g_A)$ が与えられている．Γ_A **によって導かれる権利体系** (the rights structure induced by Γ_A) とは，以下で定義される権利関係 $D_G := D_G^{\Gamma_A}$ からなる権利体系 $\langle D_G \rangle_{G \subset N}$ のことである: 任意の選択肢 $x, y \in A$ と任意の非空な提携 G について，$x D_G y$ となるのは:[12]

$$\forall s \in S_A \ [y = g_A(s) \to \exists s'_G \in \prod_{i \in G} S_{iA} \ (x = g_A(s'_G, s_{-G}))].$$

$x D_G y$ requires that group G has the power to change the outcome y into the outcome x on its own, no matter what strategies individuals outside the group choose. [$x D_G y$ となるとき，提携 G は (提携以外の個人の戦略に反応して) 自分たちの戦略を適当に選ぶことにより，状態 y を状態 x に変えることができる．]

- 「ゲーム・フォームによって導かれる権利体系」の定義に，選好は無関係である.

- ゲーム・フォームによって導かれる権利体系は，そのゲーム・フォームのもとで個人や提携に与えられている (選択肢を変えることのできる) パワーを記述.

[11] Hammond [5] はべつのアプローチを採用している．そこでは同じ帰結を生むゲーム・フォームを同一視している.

[12] 条件 $\exists s \in S_A \ [y = g_A(s)]$ も要求したほうが自然かもしれない.

- それぞれのゲーム・フォームは，それよって導かれる権利体系にたいして自由尊重型である．
- 「ゲーム・フォームによって導かれる個人権利体系」も定義できる [6].
- Hammond [6] は，拡張された選択肢 (x, Γ) たちを比較する選好を考えるとき，
  1. 社会状態 x と
  2. ゲーム・フォーム Γ によって導かれる権利体系 $\langle D_G^\Gamma \rangle_{G \subset N}$

  とだけに依存するような選好に注目すればいいと考えているようである．
- ゲーム・フォームの概念を回避して，社会状態と権利体系のペアからなる拡張された選択肢 $(x, D^{\mathcal{G}})$ を考えたほうが直接的ではないか?
- (三原) 権利体系 $D^{\mathcal{G}}$ は提携にペア (x, y) の集合を対応．本質的なちがいはないが，それぞれのペアに (そのペアに対する権利を持つ) 提携の集合を対応させた方がすっきりしないか．その方が協力ゲームの理論を適用しやすくならないか．
- (三原) 権利は絶対的なものではないだろうか? 相対化された権利を権利と呼べるか? 権利の割当て自体が選好に依存するように「権利体系」を再定義するほうが概念的には正しいのでは．

5.7 文献案内

この章の主な参考文献は Hammond [6] である．

社会選択ルールとセンの定理．鈴村 [23] に詳しい．

ゲーム・フォームによるアプローチ．

第 5.5 節の「自由尊重 α 型」あるいは「自由尊重 β 型」ゲーム・フォームという概念の背後には effectivity functions の考え方がある．Gärdenfors [3] は選択肢の集合を限定することができるパワーによって，提携のもつ権利を定式化した．Effectivity function の概念を暗示的にもちいて権利論を論じた先駆的な研究になっている．ただし選好が選択肢の集合を比較するものになっていたり，考えているゲーム・フォームが特殊なものであったりで，最近のゲーム理論や関連分野とのかかわりがわかりにくいかもしれない．Peleg [14] は effectivity functions の概念をもちいて，Gädenfors のフレームワークを一般化すると同時に基礎を与えている．ゲーム理論 (特に協力ゲーム理論）の結果が応用しやすい形になっている．ただし Peleg には概念的に不自然な印象を与える (解釈が困難な) 部分がみられる．

Effectivity functions の理論は Moulin and Peleg [10]，Moulin [9]，Peleg [13]，Abdou and Keiding [1]，Ichiishi [7] などに解説．

参考文献

[1] J. Abdou and H. Keiding. *Effectivity Functions in Social Choice*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[2] Kenneth J. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. Yale University Press, New Haven, 2nd edition, 1963.

[3] Peter Gärdenfors. Rights, games and social choice. *Noûs*, Vol. 15, pp. 341–356, 1981.

[4] Allan Gibbard. A Pareto-consistent libertarian claim. *Journal of Economic Theory*, Vol. 7, pp. 388–410, 1974.

[5] Peter Hammond. Game forms versus social choice rules as models of rights. In *Social Choice Re-examined: Proceedings of the IEA Conference held at Schloss Hernstein, Berndorf, Vienna, Austria*, Vol. 2, chapter 11, pp. 82–95. Macmillian, Hampshire, 1996.

[6] Peter J. Hammond. Social choice of individual and group rights. In William A. Barnett, et al., editors, *Social Choice, Welfare, and Ethics*, chapter 3, pp. 55–77. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[7] Tatsuro Ichiishi. *The Cooperative Nature of the Firm*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[8] Jerry S. Kelly. *Social Choice Theory: An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[9] H. Moulin. *The Strategy of Social Choice*. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[10] H. Moulin and B. Peleg. Cores of effectivity functions and implementation theory. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 10, pp. 115–145, 1982.

[11] Robert Nozick. *Anarchy, State, and Utopia*. Basic Books, New York, 1974.

[12] ロバート・ノージック. アナーキー・国家・ユートピア: 国家の正当性とその限界. 木鐸社, 1996. 嶋津格訳，原著 1974 年刊行.

[13] Bezalel Peleg. *Game Theoretic Analysis of Voting in Committees*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[14] Bezalel Peleg. Effectivity functions, game forms, games, and rights. *Social Choice and Welfare*, Vol. 15, pp. 67–80, 1998.

[15] Donald G. Saari. Connecting and resolving Sen's and Arrow's theorems. *Social Choice and Welfare*, Vol. 15, pp. 239–261, 1998.

[16] Amartya Sen. Liberty, unanimity and rights. *Economica*, Vol. 43, pp. 217–245, 1976.

[17] アマルティア・セン. 合理的な愚か者: 経済学＝倫理学的探究. 勁草書房, 1989. 大庭 健，川本 隆史訳，原著 1982 年刊行.

[18] Kotaro Suzumura. *Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[19] 川本隆史. 現代倫理学の冒険: 社会理論のネットワーキングへ. 現代自由学芸叢書. 創文社, 1995.

[20] 佐伯胖. 「きめ方」の論理：社会的決定理論への招待. 東京大学出版会, 1980.

[21] 塩野谷祐一. 価値理念の構造: 効用対権利. 東洋経済新報社, 1984.

[22] 篠田寿一, 米澤佳己. 集合・位相演習. 数学演習ライブラリ, No. 7. サイエンス社, 1995.

[23] 鈴村興太郎. 経済計画理論. 第二版 経済学全集, No. 14. 筑摩書房, 1982.

[24] 鈴村興太郎. 厚生・権利・社会的選択. 経済研究 [一橋], Vol. 47, pp. 64–79, 1996.

[25] 永谷裕昭. 経済数学. 有斐閣, 1998.